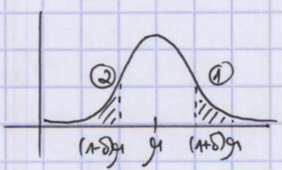
הסתברות - תרגול 8/5 - 1

אי שוויון צ'רנוף - יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ בלתי תלויים.

$X_i\sim Ber(p_i)$ אזי עבור - $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $\mu=E(x)$ מתקיים שלכל $0<\delta<1$:

1. $P(X\ge(1+\delta)\cdot\mu)\le e^{-\frac{\delta^2\mu}{3}}$
2. $P(X\le(1-\delta)\cdot\mu)\le e^{-\frac{\delta^2\mu}{2}}$



שאלה - רינה ויוסי משחקים טורניר של n משחקי שח.

לרינה יש הסתברות של 0.6 לנצח במשחק. חסמו את ההסתברות שרינה תפסיד בטורניר באמצעות חסם צ'רנוף.

פיתרון - רינה תפסיד בטורניר אם היא מנצחת פחות ממחצית המשחקים.

אם X - מס' הניצחונות של רינה, אז אנו רוצים למצוא את: $P(X\le\frac{n-1}{2})$

$P(X\le(1-\delta)E(x))\le e^{-\frac{E(x)\delta^2}{2}}$

במקרה שלנו - $E(x)=n\cdot p=n\cdot 0.06=\frac{3n}{5}$

דהיינו צריך להתקיים $(1-\delta)\mu=a\ge\frac{n-1}{2}$

$(1-\delta)\frac{3n}{5}\ge\frac{n-1}{2}$

$(1-\delta)\ge\frac{(n-1)5}{3n\cdot 2}$

$\underbrace{1-\frac{5}{6}\left(\frac{n-1}{n}\right)}\ge\delta$

פונקציה יורדת - $f(n)$

$\frac{1}{3}\ge\delta \leftarrow n\ge 5$

$P(X\le\frac{n-1}{2})\le P(X\le a)\le e^{-\frac{\delta^2\cdot\mu}{2}}\le e^{-\frac{(\frac{1}{3})^2\cdot\frac{3n}{5}}{2}}=e^{-\frac{n}{30}}$

שאלה - יהי X מס' הפעמים שיוצא 6 ב-n הטלות קוביה.

תהי - $P=P(X\ge\frac{n}{4})$. חשבו את כל החסמים (מרקוב, צ'רנוף, צ'בישב) עבור P.

פיתרון - צ'רנוף - $P=P(X\ge\frac{n}{4})=P(X\ge(1+\delta)\mu)\le e^{-\frac{\mu\cdot\delta^2}{3}}$

$\mu=E(x)=\frac{n}{6}$ (בינומי), $\frac{n}{4}=(1+\delta)\mu=(1+\delta)\frac{n}{6}$

$\Downarrow$

$\delta=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow P\le e^{-\frac{(\frac{n}{6})\cdot(\frac{1}{2})^2}{3}}=e^{-\frac{n}{72}}$

מרקוב - $P(X\ge t)\le\frac{E(x)}{t}=\frac{\mu}{t}$

$P(X\ge\frac{n}{4})\le\frac{(\frac{n}{6})}{(\frac{n}{4})}=\frac{2}{3}$

הסתברות — תרגול - 8/5-2

צ'בישב - $P(X\ge \frac{n}{4}) = P(X-\mu \ge \frac{n}{4}-\mu) = \{\mu=\frac{n}{6}\}$

$$= P(X-\frac{n}{6} \ge \underbrace{\frac{n}{4}-\frac{n}{6}}_{\frac{n}{12}}) \le P(|X-\frac{n}{6}|\ge \frac{n}{12}) \le \frac{Var(X)}{(\frac{n}{12})^2} \Rightarrow (*)$$

שונות של משתנה בינומי $\Leftarrow (n,\frac{1}{6})$ - $Var(X)=n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5n}{36}$

(כעת להתייחס לצ'רנוב). $(*)\Rightarrow \frac{n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{(\frac{n}{12})^2}=\frac{20}{n}$

עבור $n\ge 30$, ניקח חסם צ'בישב ועבור $n\le 30$ ניקח מרקוב.

שאלה - תוך שימוש באי שוויון צ'רנוב מצאו חסם לביטוי. $(\varepsilon>0)$

$$P(|X-\mu|\ge \varepsilon\mu)=P(X-\mu\ge\varepsilon\mu)+P(X-\mu\le-\varepsilon\mu)=$$

$$=P(X\ge(\varepsilon+1)\mu)+P(X\le(1-\varepsilon)\mu)\le e^{-\frac{\varepsilon^2\cdot\mu}{3}}+e^{-\frac{\varepsilon^2\cdot\mu}{2}}\le$$

$$\le 2\cdot e^{-\frac{\varepsilon^2\cdot\mu}{3}}$$

$g(E(X))\le E(g(X))$ - עבור פונקציה g קמורה. ← א"ש ינסן.

$-''- \ \ge\ -''-$ - עבור פונקציה g קעורה.

שאלה - תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מ"מ אי-שליליים ובלתי תלויים בעלי תוחלת ושונות זהים וסופיים.

נגדיר $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, הוכיחו: שעבור כל $\varepsilon>0$ - $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{E(S_n)}-1\right|\ge\varepsilon\right)=0$.

פיתרון - $E(S_n)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=nE(X_1)$

נשתמש בא"ש צ'בישב לצורך כך.

עלינו לחשב - $Var(S_n)=Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=n\cdot Var(X_1)$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{E(S_n)}-1\right|\ge\varepsilon\right)=P\left(\frac{|S_n-E(S_n)|}{E(S_n)}\ge\varepsilon\right)=P(|S_n-E(S_n)|\ge E(S_n)\cdot\varepsilon)$$

$$=\frac{Var(S_n)}{\varepsilon^2\cdot E(S_n)^2}=\frac{n\cdot Var(X_1)}{\varepsilon^2\cdot n^2\cdot E(X_1)^2}=\frac{1}{n}\cdot\overbrace{\frac{Var(X_1)}{\varepsilon^2\cdot E(X_1)^2}}^{\text{סופי}}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

הסתברות - תרגול - 22/5-1

1. שאלה - הוכיחו - אם $\Omega \neq \emptyset$, A σ-אלגברה מעל Ω אז:

א) הקבוצות $\emptyset, \Omega$ שייכות ל-A.

ב) אם $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq A$ אז $\sum_{i=1}^{n} A_i \in A$ ו- $\prod_{i=1}^{n} A_i \in A$

ג) אם $C, B \in A$ אז $C - B \in A$.

פיתרון - הגדרה - בהינתן קבוצה $\Omega \neq \emptyset$ משפחה לא ריקה A של תת קבוצות של Ω נקראת σ-אלגברה מעל Ω אם מתקיימים התנאים הבאים:

א) לכל $A \in A$, $\bar{A} \in A$ $\quad (\underset{\text{מש"ל}}{A^c} =)$

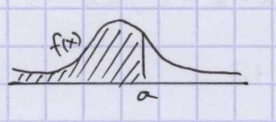
ב) לכל $\{A_i\}_{i \in N}$ מתקיים $\sum_{i \in N} A_i \in A$

⇐ א) מכיוון ש-A לא ריקה אז קיים $A \in A$ לכן $\bar{A} \in A$ (לפי תנאי א') ⇐ לפי תנאי ב' - $\Omega = A + \bar{A}$

כמו כן - $\emptyset = \bar{\Omega} \in A$

ב) נתון $\{A_i\} \subseteq A \xLeftarrow{\text{א'}} \{\bar{A}_i\} \subseteq A \Leftarrow$ על פי כלל דה מורגן $\underset{\text{ב'}}{\sum \bar{A}_i \in A} \Leftarrow \underset{\text{דה מורגן}}{\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i}} \underset{\text{א'}}{\Leftarrow} \prod_{i=1}^{n} A_i \in A$

ג) $B, C \in A \underset{\text{א'}}{\Leftarrow} \bar{B} \in A \underset{\text{ב'}}{\Leftarrow} C - B = C \backslash B = C \cap \bar{B} \in A$



$$X, \quad \underset{\text{פונקצית צפיפות}}{f(x)}, \quad \underset{\text{פונקצית התפלגות}}{F(a)} = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

$P(X \leq a) = F(a)$

2. שאלה - פונקצית צפיפות של משתנה מקרי X היא

$$f(x) = \begin{cases} Cx^n, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

א) מצאו את C

ב) $P(X > x)$ לכל $0 < x < 1$

פיתרון - א) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} Cx^n dx = C \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{C}{n+1}$

$$1 = \frac{C}{n+1} \Rightarrow C = n+1$$

ב)

$$P(X > x) = \int_{x}^{1} (\underset{C}{n+1}) t^n dt = (n+1) \int_{x}^{1} t^n dt = \cancel{(n+1)} \cdot \frac{t^{n+1}}{\cancel{n+1}} \Big|_x^1 = 1 - x^{n+1}$$

3. שאלה - פונקצית הצפיפות של מ"מ X היא

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

ונתון ש- $E(X) = 0.6$ חשבו:

א) $P(X < \frac{1}{2})$

ב) $Var(X)$

הסתברות_ תרגול - 2-22|5

במשתנה רציף - $E(x)=\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)$ במשתנה בדיד - $E(x)=\sum_{a=-\infty}^{\infty} P(t=x)\cdot x$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2\cdot f(t)dt \qquad \sum_{t=-\infty}^{\infty}(t-E(x))^2\cdot P(x=t)$$

$$E((x-E(x))^2)$$

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^1(ax+bx^2)dx=\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^3}{3}\Big|_0^1=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$$

$$0.6=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x(ax+bx^2)dx=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^4}{4}\Big|_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{4}$$

2 משוואות מ-2 נעלמים $\Rightarrow\ a=3.6\ ,\ b=-2.4$

קיבלנו שבקטע $0<x<1$ $f(x)=3.6x-2.4x^2$

א) $P(x<\frac{1}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(3.6x-2.4x^2)dx$

$$=[1.8x^2-0.8x^3]_0^{\frac{1}{2}}=0.35$$

ב) $Var(x)=E(x^2)-\underbrace{E(x)^2}_{0.6^2}$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1(3.6x^3-2.4x^4)dx=$$

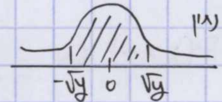
$$=0.9x^4-0.48x^5\Big|_0^1=0.42$$

$$Var(x)=0.42-0.36=0.06$$

4. שאלה - יהי X משתנה מקרי רציף בעל פונקצית צפיפות f_x.
מהי פונקצית הצפיפות של $Y=X^2$?

פיתרון -

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(X^2<y)=P(-\sqrt{y}<x<\sqrt{y})=$$



רק עבור $y>0$

$$=\underbrace{P(x<\sqrt{y})}_{F_X(\sqrt{y})}-\underbrace{P(x<-\sqrt{y})}_{F_X(-\sqrt{y})}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

נגזור את שני אגפי המשוואה לפי y -

$$f_Y(y)=F'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})]$$

נגזרת פנימית של $\sqrt{y}$ ו $-\sqrt{y}$ לפי y.

5. שאלה - יהי X מ"מ עם צפיפות

$$f(x)=\begin{cases} C/\sqrt{x}, & 0<x\le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

א) מצאו את C

ב) מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת.

ג) חשבו תוחלת ושונות.

ד) בוחרים נק' אקראית בקטע [0,1] מתוך התפלגות של X.

הסתברות — תרגול - 22|5 - 3

← הנק' מחלקת את הקטע הנ"ל ל-2 קטעים. מהי ההסתברות שהיחס בין הקטע הקצר בחלוקה לקטע הארוך יהיה קטן מ-$\frac{1}{4}$?

פתרון - א)

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{x}}\,dx=c\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{x^{-\frac{1}{2}}}\,dx=c\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=2c \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

ב)

$$F_X(a)=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx=\int_0^a \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^a=\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,\ 0\le x\le 1\\ 0 & ,\ x<0\\ 1 & ,\ x>1\end{cases}$$

ג)

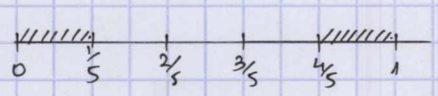
$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$Var(x)=E(x^2)-E(x)^2$$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^2}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{5}$$

$$Var(x)=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{45}$$

ד) היחס הדרוש יתקבל אם נבחר נק' בתחום מהקטעים המסומנים:



$$P(\text{היחס הקטן לגדול קטן מ-}\tfrac{1}{4})=P(0\le x<\tfrac{1}{5})+P(\tfrac{4}{5}<x\le 1)=F_x(\tfrac{1}{5})-F_x(0)+F_x(1)-F_x(\tfrac{4}{5})=$$

$$=F_x(\tfrac{1}{5})+1-F_x(\tfrac{4}{5})$$

הסתברות - תרגול - 1-2015

1. יהא X מ"מ המתפלג באופן אחיד בקטע $(0,5)$ ותהי נתונה המשוואה: $4y^2+4xy+x+2=0$

מצאו את ההסתברות ששורשיו ממשיים.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha\le x\le\beta\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

פתרון - על מנת ששורשי המשוואה יהיו ממשיים צריך להתקיים:

$$\Delta=\sqrt{b^2-4ac}\geq 0$$

במקרה שלנו - $\Delta=16x^2-4\cdot4(x+2)\geq0$

$$(*)\quad x^2-x-2\geq0$$

פותרים את המשוואה $(*)$ ומקבלים $x\le-1$ או $x\geq2$

$$P(\{x\geq2\}\cup\{x\le-1\})=1-P(-1\le x\le2)=1-\int_{-1}^{2}f(x)dx=$$

$$=1-0-\int_0^2\frac{1}{5}dx=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

2. פונקציה צפיפות משותפת של מ"מ X,Y נתונה ע"י: $f(x,y)=c(1-x-y)$

עבור x,y המקיימים: $x\geq0$, $y\geq0$, $x+y\le1$ ו-0 אחרת.

א) מצאו את c.

פתרון - $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\,dy=(*)$

$$x+y\le1 \Leftarrow y\le1-x$$

$$(*)=\int_0^1\int_0^{1-x}c(1-x-y)dydx=1$$

$$1=\int_0^1\left(-\frac{c}{2}\left[(1-x-y)^2\right]_0^{1-x}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\frac{c}{2}(1-x)^2dx=\left[-\frac{c}{6}(1-x)^3\right]_0^1=\frac{c}{6}$$

$$1=\frac{c}{6}\longrightarrow 6=c$$

ב) מצאו את התוחלת של x,y, השונות של x,y.

פתרון - על מנת למצוא את התוחלת של מ"מ X תחילה נמצא את פונ' הצפיפות השולית של f_x של x.

$$f_x(x)=\int_0^{1-x}\overset{=c}{6}(1-x-y)dy=-3\left[(1-x-y)^2\right]_0^{1-x}=3(x-1)^2$$

באותו אופן - $f_y(y)=3(y-1)^2$

הסתברות - תרגיל - 2015-ג

מטעמי סימטריה של $f(x,y)$ דהיינו $f(x,y)=f(y,x)$

$$E(Y)=E(x)=\int_0^1 t\cdot f_x(t)dt=\int_0^1 t\cdot 3(t-1)^2dt=$$

$$=\int_0^1(3t^3-6t^2+3t)\,dt=\frac{1}{4}$$

$$V(Y)=V(x)=E(x^2)-E(x)^2=\int_0^1 t^2\,3(t-1)^2dt-\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$=\left[\frac{3t^5}{5}-\frac{6t^4}{4}+\frac{3t^3}{3}\right]_0^1-\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{3}{80}$$

ג) מצאו את התוחלת של X בהינתן $Y=y$.

פיתרון - $$E(X|Y=y)=\int_0^{1-y}x\cdot f_{X|Y}(x|y)dx=\int_0^{1-y}x\cdot\frac{f(x,y)}{f_y(y)}dx$$

$$=\int_0^{1-y}x\cdot\frac{6(1-x-y)}{3(y-1)^2}dx=\frac{2}{(y-1)^2}\int_0^{1-y}(x-2x-xy)dx=\frac{1-y}{3}$$

$$E(X|Y=2)=?=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$$

3. X,Y משתנים מקריים עם פונקצית הסתברות משותפת

$$f(x,y)=\begin{cases}x/5+c\cdot y & ,\ 0<x<1\quad 1<y<5\\ 0 & ,\ \text{אחרת}\end{cases}$$

א) מה ערכו של C?

ב) האם X ו-Y תלויים?

ג) חשבו את $P(X+Y>3)$.

פיתרון - א) $$1=\int_0^1\int_1^5\left(\frac{x}{5}+cy\right)dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\left(\left[\frac{xy}{5}+\frac{c}{2}y^2\right]_1^5\right)dx=\int_0^1\left(x+12.5c-\frac{1}{5}x-\frac{1}{2}c\right)dx$$

$$=\left[\frac{4}{5}\frac{x^2}{2}+12cx\right]_0^1\Rightarrow\frac{2}{5}+12c=1\rightarrow c=\frac{1}{20}$$

ב) X ו-Y בלתי תלויים אם לכל 2 קבוצות A ו-B של מס' ממשיים מתקיים:

$$P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$$

Vayner $\quad F_{x,y}(a,b)=F_x(a)\cdot F_y(b)$

$f_{x|y}=f_x$

$\frac{f(x,y)}{f_y}\Leftrightarrow P(X|Y)=P(X^L)$

ג) $$P(X+Y\geq 3)$$

$$x+y=3\longrightarrow y=3-x$$

הסתברות – תרגול 3-2012

$$P(X+Y\geq 3)=\int_0^1\int_{3-x}^{5}\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{20}\right)dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\left(\left[\frac{xy}{5}+\frac{y^2}{40}\right]_{3-x}^{5}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{25x}{40}-\frac{3x^2}{10}+\frac{x^3}{15}+\frac{(3-x)^3}{120}\right]_0^1=$$

$$=\frac{11}{15}$$

4. אורך חיים של סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת 1,000 דקות.
אדם קונה 10 סוללות, מה הסיכוי שימצא ביניהן 7 מוצלחות, דהיינו שיפעלו מעל התוחלת.

התפלגות מעריכית - $X\sim Exp(\lambda)$
$x\geq 0$

$$f_X(t)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}$$

$$F_X(t)=1-e^{-\frac{t}{\lambda}}=P(X<t)$$

$$E(X)=\lambda\ ,\ V(X)=\lambda^2$$

פיתרון - עפ"י הנתון $\lambda=1{,}000$. ואורך החיים של סוללה: $X\sim Exp(1{,}000)$

$$P(X\geq 1{,}000)=1-P(X<1{,}000)=1-F_X(1{,}000)$$

$$=1-\left(1-e^{-\frac{1000}{1000}}\right)=e^{-1}\rightarrow Y\sim Bin(10,e^{-1})$$

$$P(Y=7)=\binom{10}{7}\cdot(e^{-1})^7\cdot(1-e^{-1})^3=0.028$$

5. מכונית מוכנסת לטיפול במוסך, נניח שמשך זמן טיפול מתפלג מעריכית עם תוחלת 20. משך זמן החלפת צמיגים מתפלג מעריכית עם תוחלת 15. בהנחה ש-2 הטיפולים בת"ז ומתבצעים בו זמנית, מצאו את התפלגות משך השהייה של המכונית במוסך ותוחלת זמן השהייה.

פיתרון - Z-משך שהייה במוסך.

$$Y\sim Exp(15)\ ,\ X\sim Exp(20)$$

$$Z=max(X,Y)$$

פונ' התפלגות (של Z): $F_Z(t)=P(Z\leq t)=P(max(X,Y)\leq t)=$

$$=P(X\leq t,Y\leq t)=P(X\leq t)\cdot P(Y\leq t)=$$

$$=P(X\leq t)\cdot P(Y\leq t)=\left(1-e^{-\frac{t}{20}}\right)\left(1-e^{-\frac{t}{15}}\right)=1-e^{-\frac{t}{15}}-e^{-\frac{t}{20}}+e^{-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{15}\right)t}$$

$$f_Z(t)=F_Z'(t)=\frac{1}{15}e^{-\frac{t}{15}}+\frac{1}{20}e^{-\frac{t}{20}}-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{15}\right)e^{-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{15}\right)t}$$

$$E(Z)=\int_0^\infty t\cdot f_Z(t)dt=\int_0^\infty\frac{t}{15}e^{-\frac{t}{15}}dt+\int_0^\infty\frac{t}{20}\cdot e^{-\frac{t}{20}}dt-\int_0^\infty t\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{20}\right)e^{-\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{20}\right)t}dt$$

הסתברות — תרגיל-בית-4

כל אחד מהאינטרוולים הוא ___ של מ"מ מעריכי:

$$E(Z)=15+20-\frac{1}{\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{20}\right)}$$

הסתברות- תרגול 1-12|6

שאלה- 5:00-6:00, 10 דק' המתנה.

הנער הגיע X דק' אחרי השעה 5. מהי ההסתברות (המותנית) שהם יפגשו.

פתרון- X- זמן ההגעה של הנער.

Y- זמן ההגעה של הנערה. $Y\sim U(0,60)$, $f_Y(y)=\frac{y}{60-0}$

מתקיים פגישה אם- $|X-Y|\le 10$. נסמן את המאורע זה ב-A.

$$P(A|X=x)=P(|X-Y|\le 10|X=x)=P(-10\le Y-x\le 10|X=x)=$$

$$=P(x-10\le Y\le x+10|X=x)=P(x-10\le Y\le 10+x)$$

עבור $0\le x\le 10$ - $P(A|X=x)=\int_0^{x+10}\frac{1}{60}\,dt=\frac{10+x}{60}$

עבור $10\le x\le 50$ - $P(A|X=x)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

עבור $50\le x\le 60$ - $P(A|X=x)=\int_{x-10}^{60}\frac{1}{60}\,dt=1-\frac{x-10}{60}$

שאלה- $X\sim U[0,1]$ ויהי $Y=X^2$, מהי פונקציית הצפיפות של Y?

פתרון- תזכורת- ניתן לחשב את הטרנספורמציה על משתנה בשיטות הבאות:

1) $F_Y(y)=P(Y<y)=P(X^2<y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})\underset{X\sim U[0,1]}{=}P(0\le X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{1-0}\,dt=\sqrt{y}$

$\Rightarrow F_Y(y)=\sqrt{y}\ \Rightarrow f_Y=F'_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

2) החלפת משתנים $Y=g(x)$, $f_Y(y)=\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|\cdot f(\underbrace{g^{-1}(y)}_{\text{המקור של } y})$, $g^{-1}:y\longrightarrow x$

$\longrightarrow g(x)=x^2$

$g^{-1}(y)=\sqrt{y}$

$f_X(x)=1/1=1$

$f_Y(y)=\left|\frac{d}{dy}\sqrt{y}\right|\cdot\underbrace{f_X(\sqrt{y})}_{=1}=\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|\cdot 1=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

שאלה- נתון $f_X(x)=2xe^{-x^2}$, עבור $x>0$ מצאו את ההתפלגות של $Y=X^2$.

פתרון- כאשר $x>0$ הפונקציה $y=g(x)=x^2$ היא פונקציה חח"ע וערכי y האפשריים הם $y>0$ לכן קיימת פונקציה הפיכה על הקטע $y\in(0,\infty)$ וניתן להשתמש בנוסחה.

$x=g^{-1}(y)=\sqrt{y}\qquad \frac{d}{dy}g^{-1}(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$f_Y(y)=\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|f_X(g^{-1}(y))=e^{-y}\Rightarrow Y\sim$

הסתברות - תרגול - 2-12/6

שאלה - יהיו X_1 ו- X_2 מ"מ ב"ת בעלי התפלגות אחידה. $X_1, X_2 \sim U[0,1]$.

נגדיר: $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$ חשבו את $f_{Y_1+Y_2}(y_1,y_2)$.

פיתרון -

$$y_1 = x_1 + x_2 = g_1(x_1, x_2)$$

$$y_2 = x_1 - x_2 = g_2(x_1, x_2)$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2)^T, \quad \vec{x} = (x_1, x_2)^T$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad det = -2$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = g_1^{-1}(y_1, y_2), \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = g_2^{-1}(y_1, y_2)$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \underbrace{|J|^{-1}}_{\text{יעקוביאן}} f_{X_1,X_2}\left(g_1^{-1}(y_1,y_2),\ g_2^{-1}(y_1,y_2)\right)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

לכן

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 \cdot 1 = 1, & \text{עבור } 0 \le x_1, x_2 \le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{|-2|} \cdot f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le \frac{y_1-y_2}{2} \le 1 \\ & 0 \le \frac{y_1+y_2}{2} \le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

הגדרה - מ"מ X מתפלג נורמלי אם:

$$f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$V(x) = \sigma^2, \quad E(x) = \mu$$

שאלה - חשבו את השטח הבא:

$$P(-2.07 < Z < 2.07)$$

$$P(-0.13 < \quad < 1.11)$$

הסבר - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$$

הסתברות - תרגול 3-12/6

$$E(Y)=\frac{1}{\sigma}E(X)-E\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}\cdot\mu-\frac{\mu}{\sigma}=0$$

$$Var(Y)=V\left(\frac{X}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma}\right)=V\left(\frac{X}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}V(X)=1$$

$$Y\sim N(0,\underset{\sigma^2}{\overset{}{1}})\longrightarrow$$ מסומן בד"כ ב-Z

פתרון - $P(-2.07<Z<2.07)=P(Z<2.07)-P(Z<-2.07)=$

$$=\phi(2.07)-(1-\phi(2.07))=2\cdot\phi(2.07)-1=$$

$$=2\cdot(0.9808)-1=0.9616$$

$$P(-0.13<Z<1.11)=P(Z<1.11)-P(Z<-0.13)=$$

$$\overset{\text{סימטריה}}{=}P(Z>0.13)=1-P(Z<0.13)$$

$$=\underset{0.8665}{P(Z<1.11)}-(1-\underset{0.5517}{P(Z<0.13)})=0.4182$$

תרגיל - אם $Z\sim N(0,1)$ מצאו C כך ש-

א) $P(Z<c)=0.95$

ב) $P(Z<c)=0.01$

פתרון - א) $\frac{1}{2}(\underset{\phi(1.64)}{0.9495}+\underset{\phi(1.65)}{0.9505}\Rightarrow c\approx1.645$

ב) $P(Z<c)=0.01$

$$P(Z<a)=0.99\Rightarrow a=2.325$$

$$a=-c \qquad c=-2.315$$

שאלה - המכירות של משחק שבועיים מתפלגות $\mu=10,000$, $\sigma=1,500$ $X\sim N(10,000,1500^2)$

א) מה ההסתברות שיותר מ-12,000 עותקים ימכרו בשבוע?

$$Z=\frac{X-10,000}{1,500}\sim N(0,1)\quad,P(X>12,000)=P\left(\frac{X-10,000}{1500}>\frac{12,000-10,000}{1500}\right)=$$

$$=P\left(Z>\frac{2000}{1500}\right)=P\left(y>1\tfrac{1}{3}\right)=1-P\left(Z<1\tfrac{1}{3}\right)=0.098$$

הסתברות - תרגיל - 1916 - 1

שאלה - מכירות $\mu=10{,}000$, $\sigma=1500$

א) מה ההסתברות שיותר מ-12,000 שפורפרות ימכרו בשבוע?

פיתרון - X= מס' השפורפרות שנמכרו בשבוע $X\sim N(10{,}000,1500^2)$

$$P(X>12000) \Leftarrow Z=\frac{X-10000}{1500}\sim N(0,1)$$

$$P(X>12000)=P\left(Z>\frac{12000-10000}{1500}\right)=P(Z>1\tfrac{1}{3})=1-\phi(1\tfrac{1}{3})$$

$$=1-0.9082=0.0918$$

ב) כמה שפורפרות החברה צריכה לייצר כך שבהסתברות של 95% לחברה יהיה מספיק מלאי כדי לכסות את הצריכה השבועית?

פיתרון - $P(X\le a)=0.95$

$$P\left(Z\le\frac{a-10000}{1500}\right)=0.95$$

$$\frac{a-10000}{1500}=1.645 \Rightarrow a=\dots$$

שאלה - משחה שליחים 4x100 השיא 3 דקות ו-20 שנ'.

	א	ב	ג	ד
תוחלת	51.8	50.2	51.0	52.1
סט"ת תקן	1.2	2.0	1.1	1.3

התפלגות זמן השחייה של כל מהשחיינים היא נורמלית.

מהי ההסתברות שהקבוצה תשבור שיא?

פיתרון - נסמן X_i - הזמן של השחיין ה-i, $Y=\sum_{i=1}^{4}X_i$. Y מתפלג נורמלית כסכום של משתנים נורמליים ב"ת.

$$E(Y)=E(\Sigma X_i)=\Sigma E(X_i)=52.1+51.0+50.2+51.8=205.1$$ (בשניות)

$$V(Y)=V(\Sigma X_i)=\Sigma V(X_i)=1.3^2+1.1^2+2.0^2+1.2^2=8.34$$

$$P(Y<200)=P\left(Z<\frac{200-205.1}{\sqrt{8.34}}\right)=\phi(-1.77)=1-\phi(1.77)=1-0.9616=0.0384\sim 38\%$$

שאלה - חשבו את הפונקציה יוצרת מומנטים, של משתנה מקרי חי-בריבוע χ^2 עם n דרגות חופש.

הקדמה - התפלגות חי-בריבוע: $Z_1,\dots,Z_n\sim N(0,1)$ ב"ת, $W=Z_1^2+\dots+Z_n^2$

אז $W\sim\chi^2$ עם n דרגות חופש.

$E(W)=n$, $V(W)=2n$

הסתברות - תרגול - 16/1 - 2

פונקציה יוצרת מומנטים.

בהינתן משתנה מקרי X, הפונק' היוצרת מומנטים של X מוגדרת להיות:

$$M_X(t)=E(\underbrace{e^{tX}}_{Y(t)})$$

תכונה - יהיו X,Y מ"מ ב"ת $M_{X+Y}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$

מאחר ו- Z_i הב"ת מתקיים - $M_W(t)=M_{Z_1^2+\dots+Z_n^2}(t)$

$$=\prod_{i=1}^{n} M_{y_n^2}(t)$$

$$=\prod_{i=1}^{n} M_{Z^2}(t) \qquad (Z\sim N(0,1))$$

$$=(M_{Z^2}(t))^n=(E(e^{tZ^2}))^n$$

עבור מ"מ נורמלי סטנדרטי פונ' הצפיפות היא:

$$f_Z(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$E(e^{tZ^2})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x^2(1-2t))}{2}}dx$$

נסמן $\sigma^2=\frac{1}{1-2t}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx}_{=1}$$

פונ' צפיפות של מ"מ נורמלי $N(0,\sigma^2)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\sigma.$$

$$\Rightarrow E(e^{tZ^2})=\sigma=\sqrt{\frac{1}{1-2t}}\Rightarrow M_W(t)=(1-2t)^{-n/2}$$

שאלה - אסטרונום מעוניין למדוד את המרחק בשנות אור מהתחנה שלו לכוכב מרוחק. הוא מודע לכך שיקרו שינויים במזג האטמוספירה וטעויות במדידה אפשריות. לכן, המדידה לא תניב את המרחק המדויק. אי-לכך האסטרונום מעוניין לבצע מס' מדידות ואז להשתמש בממוצע הערכים שהתקבלו כאומדן למרחק מדויק. אם האסטרונום מניח שהערכים שהתקבלו מן המדידות הן משתנים מקריים ב"ת שווי התפלגות עם תוחלת d ושונות 4 שנות אור. כמה מדידות עליו לבצע כדי לקבל קירוב מדויק עד כדי ± 0.5 שנות אור בהסתברות 95%.

פתרון- $X_1,\dots X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y=\frac{1}{n}\sum X_i$

הסתברות תרגיל-שבוע-3

$$E(Y)=E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right)=\frac{1}{n}\sum \underbrace{E(X_i)}_{=\mu}=\frac{n\mu}{n}=\mu \qquad Y\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$V(Y)=V\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum \underbrace{\left(V(X_i)\right)}_{=\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

<u>משפט הגבול המרכזי</u>-

תהי $X_1, X_2, \dots$ סדרה של מ"מ בלת"ת ושווי התפלגות.

עם תוחלת μ ושונות σ^2, אזי-

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[D]{} N(0,1)$$

מ-כך

ההתפלגות / ההסתברות $\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

פיתרון- נניח שהאסטרונום מבצע n מדידות - אז $Z_n=\frac{\bar{X}_n-d}{2/\sqrt{n}} \xrightarrow[D]{} N(0,1)$

לפי המשפט

סטיית תקן של $\bar{X}_n$ בהינתן שונות 4 שנות אור.

$$P(-0.5<\bar{X}_n-d<0.5)=0.95$$

$$P\left(-0.5\cdot\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z_n\le 0.5\,\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.95$$

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)-1=0.95$$

לפיכך, אם האסטרונום רוצה להיות בטוח ב-95% במרחק שקיבל, למשל שהקירוב שלו מדויק עד כדי ± 0.5 שנות אור עליו לבצע n^* מדידות כך ש-

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n^*}}{4}\right)-1=0.95$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n^*}}{4}\right)=0.975 \Rightarrow \frac{\sqrt{n^*}}{4}=1.96 \Rightarrow n^*\approx 62$$

ניתן לפתור גם בעזרת צ'בישב- $1-0.95=P(|\bar{X}_n-d|>\underbrace{0.5}_{=a})\le\frac{\sigma^2}{a^2}=\frac{4}{(0.5)^2\cdot n}$

$$=\frac{4\cdot 4}{n}=\frac{16}{n} \quad \left(\sigma=\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

$\Leftarrow \frac{16}{n}\ge 0.05 \Leftarrow n\ge 320$ כי הסתכלנו על ההסתברות המשלימה.