משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 9

פתרון מד"ר בעזרת טורי חזקות

למדנו לפתור מד"ר לינארית מסדר n כאשר המקדמים הינם קבועים.
מה עושים אם הם לא קבועים?

- אם במד"ר הלינארית, $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = b(x)$, המקדמים $a_k(x)$ אנליטיים בנקודה $x=x_0$, נחפש פתרון בצורה של טור חזקות סביב x_0:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

הערות: (i) a_n בפתרון הינם מקדמים קבועים שאינם קשורים למקדמים האנליטיים מהמד"ר.

(ii) פונקציה f אנליטית בנקודה x_0 אם f מוגדרת בסביבה של x_0, וניתנת לפיתוח לטור חזקות שמתכנס ל-f בסביבת x_0.

תרגיל: פתור בעזרת טורי חזקות סביב הראשית:

א. $y' = y$

פתרון: כאן המקדמים הם ± 1, פונק' קבועה שאנליטית בכל מקום שכן כל פונק' קבועה $f=c$ ניתנת לפיתוח בצורה

$$c = c\cdot(x-x_0)^0 + 0\cdot(x-x_0)^1 + 0\cdot(x-x_0)^2 + \dots$$

נחפש פתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. נגזור ונקבל:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \underset{\text{לא תורם } n=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

שכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

נציב במד"ר ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

מהשוואת חזקות/יחידות טור טיילור נקבל:

$$\forall n=0,1,2,\dots :\ (n+1)a_{n+1}=a_n \Rightarrow a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}$$

ננסה כעת למצוא את המקדמים במפורש

$\underline{n=0}$ $$a_1=\frac{a_0}{1}$$

$\underline{n=1}$ $$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{\frac{a_0}{1}}{2}=\frac{a_0}{1\cdot 2}$$

$\underline{n=2}$ $$a_3=\frac{a_2}{3}=\frac{\frac{a_0}{1\cdot 2}}{3}=\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$\vdots$

וניתן להוכיח באינדוקציה כי $\boxed{a_n=\frac{a_0}{n!}}$

לכן הפתרון יהיה:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{n!}x^n=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=a_0e^x$$

כלו' $\boxed{y(x)=Ce^x}$ כצפוי!

<u>הערה:</u> כאן a_0 הינו תנאי ההתחלה $y(0)=a_0$.
וניתן לראות זאת גם לפי טור טיילור:

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\dots$$

<u>ב.</u> משוואת Airy (אנגלי) George Biddell Airy

$$y''=xy$$

המקדמים $-x$, 1 אנליטיים, ונחפש פתרון מהצורה

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

2 מ 3

נגזור ונקבל:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

נגזור שוב:

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} \underset{\substack{n=0 \text{ שוב} \\ \text{לא צריך}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

נציב במד"ר ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$(0+1)(0+2) a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+3) a_{n+3} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

השוואת מקדמים

יחידות הטור

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0} \\ (n+2)(n+3) a_{n+3} = a_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

נמצא את המקדמים:

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+2)(n+3)}$$

$\underline{n=0}$: $a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}$

$\underline{n=1}$: $a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}$

$\underline{n=2}$: $a_5 = \frac{a_2}{4 \cdot 5} = 0$

$\underline{n=3}$: $a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{4a_0}{6!}$

$\underline{n=4}$: $a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5 \cdot a_1}{7!}$

$\underline{n=5}$: $a_8 = \frac{a_5}{7 \cdot 8} = 0$

$\underline{n=6}$: $a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{4a_0}{6! \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot a_0}{9!}$

ונוכל לנחש כי:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{3k} &= \frac{a_0}{(3k)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-2) \\ a_{3k+1} &= \frac{a_1}{(3k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-1) \\ a_{3k+2} &= 0 \end{aligned}}$$

(*) הפתרון למשוואת Airy נקרא Airy function המסומנת ב- $Ai(x)$ -
אינה מכילה פונק' $Bi(x)$ (שלפעמים נקרא Bairy function), והפונק'
הזו היא דוגמא לפונק' שבנקודה מסויימת עוברת מאוסצילציה למעריכית:

פונקציית גמא - Γ

בכדי לפשט את המקדמים נשתמש בפונק' גמא

<u>הגדרה:</u> פונק' גמא מוגדרת ע"י האינטגרל הבא:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

פונק' גמא היא הרחבה לפונק' העצרת וניתן להראות באינדוקציה:

$$\forall n\in\mathbb{N}: \quad \boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$$

<u>לדוגמא:</u>

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1$$

$$\Gamma(3) = 2! = 2$$

- בנוסף מתקיימת הזהות הבאה: $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$

אני מכיר את קיום הזהות כש $x=n$ טבעי שכן

$$\Gamma(n+1) = n! = n\cdot(n-1)! = n\cdot\Gamma(n)$$

- ניתן להראות באינדוקציה על k:

$$\boxed{\prod_{j=1}^{k}(nj-m) = \frac{n^k\,\Gamma\left(k+\frac{n-m}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right)}}$$

כעת ניתן לכתוב את המקדמים הפתרון למשוואת איירי בצורה מפורשת:

$$\begin{cases} a_{3k} = \dfrac{a_0}{(3k)!} \cdot \dfrac{3^k \cdot \Gamma\left(k+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \\[2ex] a_{3k+1} = \dfrac{a_1}{(3k+1)!} \dfrac{3^k \cdot \Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\[2ex] a_{3k+2} = 0 \end{cases}$$

והפתרון הכללי הינו:

$$\boxed{y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0}{(3k)!} \cdot \frac{3^k \Gamma\left(k+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot X^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1}{(3k+1)!} \cdot \frac{3^k \Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot X^{3k+1}}$$

הערה נוספת על פונ' הפתרון למשוואת Airy:

פונקציה המקיימת את תנאי ההתחלה:

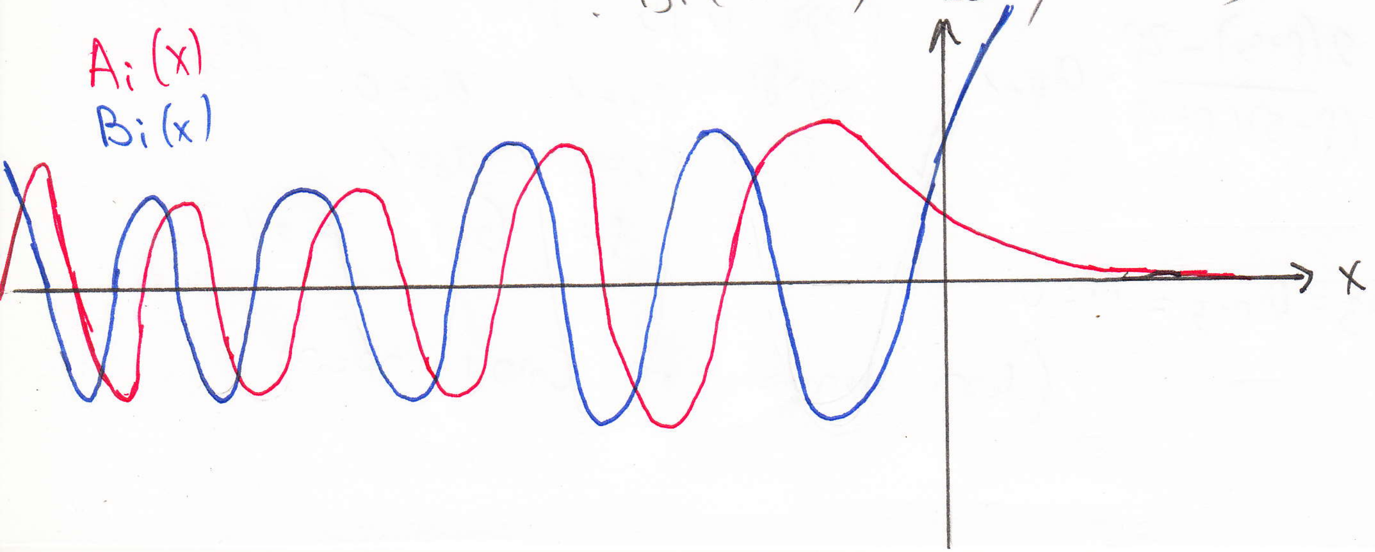
$$\begin{cases} y(0) = \dfrac{1}{3^{\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\[2ex] y'(0) = -\dfrac{1}{3^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \end{cases}$$

נקרא Airy function , $A_i(x)$

פונקציה המקיימת את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y(0) = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{6}} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\[2ex] y'(0) = \dfrac{3^{\frac{1}{6}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \end{cases}$$

נקרא Bairy function , $B_i(x)$.



ג. משוואת הרמיט (צרפתי) / Charles Hermite

$$y'' - 2xy' + cy = 0.$$

(בנוסף נענה על השאלה מתי קיים פתרון פולינומי?)(תנאי על c)

<u>פתרון:</u> המקדמים אנליטיים ולכן נחפש פתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n \ ; \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n$$

נציב במד"ר ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n\, a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n x^n = 0$$

(היה צריך להתחיל מ-1 אבל ניתן להוסיף איבר 0 שלא תזיק.)

מהשוואת מקדמים נקבל

$$\forall n = 0,1,2,\dots \qquad (n+2)(n+1) a_{n+2} - 2n\, a_n + c\, a_n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{2n-c}{(n+2)(n+1)} \cdot a_n}$$

אם $c = 2p$ (צ"ל c זוגי)

$$a_{p+2} = \frac{2p-2p}{(p+2)(p+1)} a_p = 0$$

$$a_{p+4} = \frac{2p+4-2p}{(p+4)(p+3)} a_{p+2} = 0 \implies a_{p+2} = a_{p+4} = a_{p+6} = \dots = 0$$

זוהי מד"ר מסדר שני ולכן צריך שני פתרונות בת"ל שניתן לקבל ע"י:

$$a_{p+3} = \frac{2(p+3)-2p}{(p+5)(p+4)} \cdot a_{p+1}$$

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ולהפך

$a_0 = 1$, $a_1 = 0$

מכאן נקבל גם

$$a_{p+1} = a_{p+3} = a_{p+5} = \dots = 0$$

(הסבר מפורט יותר בתרגול הבא)

דוגמאות:

$p=0$: $a_0x^0 = a_0$

$p=1$: a_1x^1

$p=2$: $a_0 + a_2x^2$

$p=3$: $a_1x + a_3x^3$

$p=4$: $a_0 + a_2x^2 + a_4x^4$

נהוג לקחת את המקדם של x^p להיות 2^p;

$p=0$: $H_0(x) = 2^0 = 1$

$p=1$: $H_1(x) = 2x$

$p=2$: $H_2(x) = a_0 + \underbrace{\frac{-4}{2\cdot 1}a_0}x^2$

$$a_2 = \frac{-4}{2\cdot 1}a_0$$

מזכירים: $n=0$ כלומר:
ואז ניקח $a_0=-2$ נקבל

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$p=3$: $H_3(x) = 8x^3 - 12$ וכך הלאה

"$H_k(x)$ הן פולינום הרמיט (פתרון למשוואת הרמיט) מספר k."

הקשר בין משוואת אוילר למקדמים קבועים

אמנם במשוואת אוילר (מספר שני) $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$
המקדמים הם אנליטיים, אולם ניתן להעביר אותה למשוואה שקולה שבה המקדמים קבועים (ולהפך)

דוגמא: פתור (עבור $x>0$) $x^2y'' + xy' + y = 0$

פתרון: נציב $x = e^t \iff t = \ln x$

$$y' = \frac{dy}{dx} \underset{\text{לפי גזירה}}{=} \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{y}\cdot\frac{1}{x} = \dot{y}\cdot e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-t}\dot{y}\right) \underset{\text{לייבניץ}}{=} \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\cdot\dot{y}\right)\cdot\frac{dt}{dx} =$$

$$= \left(-e^{-t}\dot{y} + e^{-t}\ddot{y}\right)\cdot e^{-t} = e^{-2t}\left(\ddot{y} - \dot{y}\right)$$

נציב במד"ר ונקבל:

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(\ddot{y}-\dot{y}\right) + e^{t}\cdot e^{-t}\dot{y} + y = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \ddot{y} + y = 0$$

$\lambda = \pm i \qquad \lambda^2 = -1 \qquad$ מ. מאפיינת

$$y(t) = C_1\cos t + C_2 \sin t$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)}$$