

1. יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{F}$ . תהי  $W \subseteq V$  קבוצה. הוכח כי  $W$  היא תת מרחב של  $V$  אם ורק אם מתקיימים התנאים הבאים:

•  $W \neq \emptyset$

• לכל  $u, v \in W$  ולכל  $\alpha \in \mathbb{F}$  מתקיים  $u + \alpha v \in W$ .

2. יהיו  $U, V, W$  תתי מרחבים של מרחב וקטורי. הוכח או הפוך את הטענות הבאות:

(א)  $U \cap (V + W) = U \cap V + U \cap W$

(ב)  $U \cap (V + W) \neq U \cap V + U \cap W$

(ג)  $U \cap (V + W) \subseteq U \cap V + U \cap W$

(ד)  $U \cap (V + W) \supseteq U \cap V + U \cap W$

3. יהי  $V$  מרחב וקטורי. ויהיו  $A, B \subseteq V$  קבוצות כלשהן. הוכח או הפוך את הטענות הבאות:

(א)  $\text{span}(A + B) = \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$

(ב)  $\text{span}(A \cup B) = \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$

(ג)  $\text{span}(A \cup B) = \text{span}(A) + \text{span}(B)$

(ד)  $\text{span}(A \cap B) = \text{span}(A) \cap \text{span}(B)$

זכור כי  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

4. (א) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל השדה  $\mathbb{Z}_p$ . תהי  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$  קבוצה בלתי תלויה לינארית. הוכח כי  $|\text{span}(A)| = p^n$ .

(ב) האם הסעיף הקודם נכון גם בלי הדרישה ש  $A$  בלתי תלויה לינארית? הוכח או הפוך.

(ג) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$  כך ש  $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$ . תהי  $A \subseteq V$  קבוצה כך ש  $\{0\}, \emptyset \neq A$ . האם  $\text{span}(A)$  תמיד אינסופי? הוכח או הפוך.

5. יהיו  $U, W, V$  תתי מרחבים של מרחב וקטורי. הוכח או הפוך:

(א)  $U + W = W + U$

(ב)  $(U + W) + V = U + (W + V)$

(ג)  $U \oplus V = U \oplus W \Rightarrow V = W$

6. יהי  $V$  מרחב וקטורי. יהיו  $U, W$  שני תתי מרחבים של  $V$  כך ש  $B_1$  בסיס של  $U$  ו  $B_2$  בסיס של  $W$ . הוכח או הפוך את הטענות הבאות:

(א)  $B_1 \cup B_2$  בסיס של  $U + W$ .

(ב)  $B_1 \cup B_2$  אינו בסיס של  $U + W$ .

(ג) אם  $U \cap W = \{0\}$  אז  $B_1 \cup B_2$  בסיס של  $U \oplus W$ .

(ד) אם  $U \cap W = \{0\}$  אז  $B_1 \cup B_2$  אינו בסיס של  $U \oplus W$ .

(ה)  $B_1 \cap B_2$  בסיס של  $U \cap W$ .

(ו)  $B_1 \cap B_2$  אינו בסיס של  $U \cap W$ .

7. מצא בסיס עבור קבוצת הפתרונות של כל אחת ממערכות המשוואות הבאות ( מעל  $\mathbb{R}$  ). עבור כל אחת מהן מצא גם את המימד.

(א)

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0\end{aligned}$$

8. מהו המימד של המרחבים הוקטוריים הבאים?

(א)  $\mathbb{C}^n$  כמרחב וקטורי מעל  $\mathbb{C}$ .

(ב)  $\mathbb{C}^n$  כמרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$ .

9. יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{F}$  ויהי  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס של  $V$ .

(א) עבור אילו ערכי  $c \in \mathbb{F}$  הקבוצה  $\{cv_1, \dots, cv_n\}$  היא בסיס?

(ב) עבור אילו ערכי  $\alpha \in \mathbb{F}$  הקבוצה  $\{v_1 + \alpha v_1, v_2 + \alpha v_1, \dots, v_n + \alpha v_1\}$  היא בסיס?

10. יהי  $V$  מרחב וקטורי ממימד 3 ויהיו  $v_1, v_2, v_3 \in V$  וקטורים המקיימים  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ . הוכח או הפרך:

(א)  $span(\{v_1\}) + span(\{v_2\}) + span(\{v_3\}) = V$

(ב)  $span(\{v_1\}) + span(\{v_2\}) + span(\{v_3\}) \neq V$