

1. צד א': נניח ש  $W$  תת מרחב וקטורי של  $V$  אז

$$0_V \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$$

לכן התנאי הראשון מתקיים. כמו כן, אם  $u, v \in W$  ו  $\alpha \in \mathbb{F}$  אז בגלל ש  $W$  מרחב וקטורי  $\alpha v \in W$  (כי  $W$  סגור לכפל בסקלר) ו  $u + \alpha v \in W$  (כי  $W$  סגור לחיבור) ולכן גם התנאי השני מתקיים. צד ב': נניח שהתנאי מתקיים ונוכיח ש  $W$  תת מרחב. צריך להוכיח ש  $W$  מקיים שלוש תכונות

$$W \neq \emptyset \bullet$$

$$u, v \in W \Rightarrow u + v \in W \bullet$$

$$u \in W, \alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha u \in W \bullet$$

ברור ש  $W \neq \emptyset$  זו הרי אחת הדרישות שלנו. אם  $u, v \in W$  אז לפי הנתון אפשר לבחור  $\alpha = 1_V \in \mathbb{F}$  ומתקיים

$$u + \alpha v \in W \Rightarrow u + 1_V v \in W \Rightarrow u + v \in W$$

שזו התכונה השנייה שרצינו. היות ונתון כי  $W \neq \emptyset$  קיים  $w \in W$  ניתן לבחור  $\alpha = -1_V \in \mathbb{F}$  ולקבל

$$w + \alpha w \in W \Rightarrow w - 1_V w \in W \Rightarrow 0_V \in W$$

אם  $u \in W, \alpha \in \mathbb{F}$  אז

$$0_V + \alpha u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$$

שזו התכונה השלישית שרצינו להוכיח ולכן  $W$  תת מרחב וקטורי.

2. במרחב הוקטורי  $\mathbb{R}^2$  ניקח

$$U = \text{span}(\{(1, 1)\}), \quad V = \text{span}(\{(1, 0)\}), \quad W = \text{span}(\{(0, 1)\})$$

ואז

$$V + W = \mathbb{R}^2, \quad U \cap (V + W) = U = \text{span}(\{(1, 1)\})$$

$$U \cap V = U \cap W = \{(0, 0)\}$$

ולכן

$$U \cap (V + W) = \text{span}(\{(1, 1)\}) \supsetneq \{(0, 0)\} = U \cap V + U \cap W$$

זה מהווה סתירה לא' ו ג'.

אם

$$U = V = W = \{(0, 0)\}$$

אז

$$U \cap (V + W) = \{(0, 0)\} = U \cap V + U \cap W$$

וזה מהווה סתירה ל'ב'.  
 את ד' נוכיח.  
 אם  $x \in U \cap V + U \cap W$  אז

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in U \cap V, \quad x_2 \in U \cap W$$

היות ו

$$x_1 \in U, \quad x_2 \in U$$

ובגלל ש  $U$  סגור לחיבור

$$x_1 + x_2 = x \in U$$

כמו כן, היות ו

$$x_1 \in V, \quad x_2 \in W$$

מתקיים ש

$$x_1 + x_2 = x \in V + W$$

ולכן

$$x \in U \cap (V + W)$$

שזה באמת מוכיח

$$U \cap V + U \cap W \subseteq U \cap (V + W)$$

3. (א) לא נכון. ניקח

$$A = \{(1, 0)\}, \quad B = \{(0, 1)\}$$

ואז

$$A + B = \{(1, 1)\}$$

נשים לב ש

$$(1, 1) \in \text{span}(A + B)$$

אבל

$$(1, 1) \notin \text{span}(A), \quad (1, 1) \notin \text{span}(B)$$

ולכן

$$\text{span}(A + B) \neq \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$$

(ב) לא נכון. כמו קודם

$$A = \{(1, 0)\}, \quad B = \{(0, 1)\}$$

ואז

$$\text{span}(A \cup B) = \text{span}(\{(1, 0), (0, 1)\}) = \mathbb{R}^2$$

לכן

$$(1, 1) \in \text{span}(A \cup B)$$

אבל כמו בסעיף א'

$$(1, 1) \notin \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$$

ולכן

$$\text{span}(A \cup B) \neq \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$$

(ג) נכון.

$$A \subseteq \text{span}(A) \Rightarrow A \subseteq \text{span}(A) + \text{span}(B)$$

בדומה

$$B \subseteq \text{span}(B) \Rightarrow B \subseteq \text{span}(A) + \text{span}(B)$$

לכן

$$A \cup B \subseteq \text{span}(A) + \text{span}(B)$$

היות ו  $\text{span}(A \cup B)$  הוא התת מרחב הכי קטן שמכיל את  $A \cup B$  מתקיים ש

$$\text{span}(A \cup B) \subseteq \text{span}(A) + \text{span}(B)$$

מצד שני,

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \text{span}(A) \subseteq \text{span}(A \cup B)$$

ובדומה

$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow \text{span}(B) \subseteq \text{span}(A \cup B)$$

היות ו  $\text{span}(A \cup B)$  הוא תת מרחב, הוא סגור לחיבור ולכן

$$\text{span}(A) + \text{span}(B) \subseteq \text{span}(A \cup B)$$

כך שבסך הכל קיבלנו

$$\text{span}(A \cup B) = \text{span}(A) + \text{span}(B)$$

(ד) לא נכון. ניקח

$$A = (1, 1), \quad B = (2, 2)$$

ואז

$$A \cap B = \emptyset$$

ולכן

$$\text{span}(A \cap B) = \text{span}(\emptyset) = \{(0, 0)\}$$

ומצד שני

$$\text{span}(A) = \text{span}(B) = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$$

ולכן

$$\text{span}(A) \cap \text{span}(B) = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$$

ומתקבל

$$\text{span}(A \cap B) = \{(0, 0)\} \neq \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{F}\} = \text{span}(A) \cap \text{span}(B)$$

4. (א) נשים לב ש

$$\text{span}(A) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_p\}$$

$|\mathbb{Z}_p| = p$  ולכן יש לנו  $p$  אפשרויות בשביל לבחור כל אחד מבין  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .  
 בסך הכל, יש לנו  $p^n$  צירופים לינאריים של הקבוצה  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .  
 נותר להוכיח, שכל הצירופים הלינאריים האלה שונים. כלומר, נניח שאנחנו  
 בוחרים שני צירופים לינאריים

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \quad \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

אנחנו טוענים שאם

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

אז

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \neq \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

הוכחה: נניח בשלילה ש

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

אזי

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

היות ו  $v_1, v_2, \dots, v_n$  בלתי תלויה לינארית, בהכרח מתקיים

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

כלומר

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$$

בסתירה להנחה. לכן, כל אחד מבין  $p^n$  הצירופים הלינאריים שווה לוקטור  
 אחר ו  $|\text{span}(A)| = p^n$ .

(ב) לא נכון. ניקח

$$A = \{0\}$$

ואז

$$|\text{span}(A)| = |\{0\}| = 1 \neq p = p^1$$

(ג) חייב להיות אינסופי.

היות ו  $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$ , הוא שדה אינסופי. נבחר אינסוף איברים שונים מתוך  $\mathbb{F}$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$$

היות ו  $\{0\} \neq A$  קיים  $v \in A$  כך ש  $v \neq 0$   
 אנו טוענים ש

$$\alpha_1 v, \alpha_2 v, \dots, \alpha_k v, \dots$$

הם אינסוף איברים שונים ב  $\text{span}(A)$  ולכן  $\text{span}(A)$  אינסופי.  
הוכחה: נניח בשלילה שהם לא שונים כלומר קיימים  $i, j$  כך ש  $\alpha_i v = \alpha_j v$   
כלומר

$$(\alpha_i - \alpha_j)v = 0$$

היות ו  $v \neq 0$  חייב להיות ש

$$\alpha_i - \alpha_j = 0_{\mathbb{F}}$$

ולכן

$$\alpha_i = \alpha_j$$

בסתירה להנחה ש

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$$

הם איברים שונים.  
ולכן  $\text{span}(A)$  אינסופית.

5. (א) נכון.

אם  $x \in U + W$  אז

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in U, \quad x_2 \in W$$

לפי חוק החילוף

$$x = x_2 + x_1, \quad x_1 \in U, \quad x_2 \in W$$

שזה בדיוק אומר

$$x \in W + U$$

ולכן

$$U + W \subseteq W + U$$

באופן דומה מוכיחים

$$U + W \supseteq W + U$$

ולכן

$$U + W = W + U$$

(ב) נכון.

אם  $x \in (U + W) + V$  אז

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in U + W, \quad x_2 \in V$$

היות ו  $x_1 \in U + W$  ניתן לכתוב

$$x_1 = x_3 + x_4, \quad x_3 \in U, \quad x_4 \in W$$

ולכן

$$x = (x_3 + x_4) + x_2, \quad x_3 \in U, \quad x_4 \in W, \quad x_2 \in V$$

לפי חוק הקיבוץ

$$x = x_3 + (x_4 + x_2), \quad x_3 \in U, \quad x_4 \in W, \quad x_2 \in V$$

לכן

$$x = x_3 + (x_4 + x_2), \quad x_3 \in U, \quad x_4 + x_2 \in W + V$$

כלומר

$$x \in U + (W + V)$$

לכן

$$(U + W) + V \subseteq U + (W + V)$$

בדרך דומה מוכיחים

$$(U + W) + V \supseteq U + (W + V)$$

ולכן

$$(U + W) + V = U + (W + V)$$

$$x \in W + U$$

ולכן

$$U + W \subseteq W + U$$

באופן דומה מוכיחים

$$U + W \supseteq W + U$$

ולכן

$$U + W = W + U$$

(ג) לא נכון.

אם

$$U = \text{span}(\{(1, 0)\}), \quad V = \text{span}(\{(1, 1)\}), \quad W = \text{span}(\{(0, 1)\})$$

אז

$$U \oplus V = \mathbb{R}^2 = U \oplus W$$

אבל

$$V \neq W$$

6. (א) לא נכון.

ניקח

$$B_1 = \{(1, 1)\}, \quad B_2 = \{(2, 2)\}$$

קל לראות ש

$$B_1 \cup B_2$$

היא קבוצה תלויה לינארית ולכן היא לא בסיס.

(ב) לא נכון.  
ניקח

$$B_1 = \{(1, 0)\}, \quad B_2 = \{(0, 1)\}$$

ואז

$$U = \text{span}(\{(1, 0)\}), \quad W = \text{span}(\{(0, 1)\})$$

ו

$$B_1 \cup B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

הוא אכן בסיס עבור

$$U + W = \mathbb{R}^2$$

(ג) נכון.

הוכחה: נוכיח שהקבוצה היא פורשת ובלתי תלויה לינארית.  
פורשת: נכתוב

$$B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}, \quad B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$$

אם  $x \in U + W$  אז

$$x = u + w, \quad u \in U, \quad w \in W$$

היות ו  $B_1$  פורש את  $U$  ו  $B_2$  פורש את  $W$  קיימים

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in \mathbb{F}$$

כך ש

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k, \quad w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_r w_r$$

ולכן

$$x = u + w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_r w_r$$

לכן  $B_1 \cup B_2$  אכן פורשת את  $U + W$  (שים לב שלא נזקקנו כאן להנחה ש  
 $U \cap W = \{0\}$   
בלתי תלויים לינארית: נניח ש

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_r w_r = 0$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = -\beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 - \dots - \beta_r w_r$$

אבל

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k \in U, \quad -\beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 - \dots - \beta_r w_r \in W$$

והיות ו  $U \cap W = \emptyset$  נקבל ש

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k &= 0 \\ -\beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 - \dots - \beta_r w_r &= 0\end{aligned}$$

היות ו  $B_1, B_2$  קבוצות בלתי תלויות מתקבל ש

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_r = 0$$

שזה מה שרצינו להוכיח.

לכן הקבוצה  $B_1 \cup B_2$  היא פורשת ובלתי תלויה ולכן היא בסיס עבור  $U + W$ .

(ד) היות והוכחנו את ג' ברור ש ד' לא נכון.

(ה) לא נכון.

ניקח

$$B_1 = \{(1, 1)\}, \quad B_2 = \{(2, 2)\}$$

או

$$U = W = \text{span}\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$$

אבל

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

אינו בסיס עבור

$$U \cap W = U$$

(ו) לא נכון.

ניקח  $B_1 = B_2$  ולכן  $U = W$  ואז ברור ש  $B_1 \cap B_2 = B_1$  הוא בסיס עבור  $U \cap W = U$ .

7. (א) המערכת מיוצגת על ידי המטריצה

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 6 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

מרחב הפתרונות של המטריצה הזאת שווה למרחב הפתרונות של המטריצה

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

שהגענו אליה על ידי ביצוע פעולת השורה  $R_2 = R_2 - R_1$  נמצא את הפתרון הכללי של המערכת.

הם משתנים חופשיים ולכן נסמן  $x_3, x_4$

$$x_3 = t, \quad x_4 = s$$

לפי השורה השנייה

$$-4x_2 + 3x_3 - 1x_4 = 0 \Rightarrow -4x_2 = s - 3t \Rightarrow x_2 = \frac{3t - s}{4}$$



לפי השורה הראשונה

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \frac{3t-s}{4} - 3t + s = 0$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\left(0, \frac{3t-s}{4}, t, s\right)$$

במילים אחרות הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\left\{t\left(0, \frac{3}{4}, 1, 0\right) + s\left(0, -\frac{1}{4}, 0, 1\right) \mid t, s \in \mathbb{R}\right\}$$

לכן

$$\left\{\left(0, \frac{3}{4}, 1, 0\right), \left(0, -\frac{1}{4}, 0, 1\right)\right\}$$

הוא בסיס עבור מרחב הפתרונות של המערכת והמימד הוא 2.  
(ב) דרך הפתרון דומה לא'. המערכת מיוצגת על ידי המטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & 6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

על ידי ביצוע הפעולה  $R_2 = R_2 - 2R_1$  נקבל את המטריצה המדורגת

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הם משתנים חופשיים ולכן נסמן

$$x_2 = q, \quad x_3 = t, \quad x_4 = s$$

לפי השורה הראשונה נקבל

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4q - 3t + s$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$(4q - 3t + s, q, t, s)$$

כלומר

$$\{q(4, 1, 0, 0) + t(-3, 0, 1, 0) + s(1, 0, 0, 1) \mid q, t, s \in \mathbb{R}\}$$

ולכן בסיס למרחב התרונות יהיה

$$(4, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$$

והמימד הוא 3.

8. (א) בסיס עבור  $\mathbb{C}^n$  מעל  $\mathbb{C}$  יהיה

$$\{(1, 0, \dots, 0, 0), (0, 1, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1, 0), (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

שזו קבוצה בעלת  $n$  איברים. ולכן המימד הוא  $n$ .

(ב) בסיס עבור  $\mathbb{C}^n$  מעל  $\mathbb{R}$  יהיה

$$\{(1, 0, \dots, 0, 0), (i, 0, \dots, 0, 0), (0, 1, \dots, 0, 0), (0, i, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1, 0), (0, 0, \dots, i, 0), (0, 0, \dots, 0, 1), (0, 0, \dots, 0, i)\}$$

שזו קבוצה בעלת  $2n$  איברים. ולכן המימד הוא  $2n$ .

9. (א) אם  $c = 0$  ברור שהקבוצה אינה בסיס היות והיא תלויה לינארית. נוכיח שהקבוצה היא בסיס אם  $c \neq 0$ .

נוכיח שהקבוצה בגודל  $n = \dim(V)$  ושהקבוצה היא בלתי תלוי לינארית ואז לפי משפט השלישי חינם נדע שהיא בסיס. גודל  $n$ : נניח ש

$$cv_i = cv_j$$

אז

$$c(v_i - v_j) = 0$$

היות ו  $c \neq 0$  מתקבל ש

$$v_i - v_j = 0 \Rightarrow v_i = v_j$$

בסתירה לכך ש  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  בסיס. לכן כל האיברים בקבוצה שונים וגודלה  $n$ . בלתי תלויה לינארית: נניח ש

$$\alpha_1 cv_1 + \alpha_2 cv_2 + \dots + \alpha_n cv_n$$

היות ו

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

בלתי תלוי לינארית מתקבל כי

$$\alpha_1 c = \alpha_2 c = \dots = \alpha_n c = 0$$

והיות ו  $c \neq 0$  מתקבל כי

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

ולכן הקבוצה היא בלתי תלויה לינארית לפי משפט השלישי חינם היא בסיס.

(ב) אם  $\alpha = -1$  האיבר הראשון בקבוצה יהיה 0 ולכן היא בוודאי לא תהיה בסיס. נוכיח כי עבור כל  $\alpha \neq -1$  הקבוצה הזאת היא בסיס. נוכיח שבקבוצה יש  $n$  איברים ושהיא בלתי תלויה לינארית. גודל  $n$ : נניח בשלילה ש

$$v_i + \alpha v_1 = v_j + \alpha v_1$$

אזי

$$v_i = v_j$$

בסתירה לכך ש  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  היא בסיס.  
בלתי תלויה לינארית: נניח ש

$$\alpha_1(v_1 + \alpha v_1) + \alpha_2(v_2 + \alpha v_1) + \dots + \alpha_n(v_n + \alpha v_1) = 0$$

כלומר

$$(\alpha_1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n))v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

היות ו  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  בלתי תלויה לינארית נקבל ש

$$\alpha_1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_n = 0$$

כלומר נותר להוכיח רק עוד

$$\alpha_1 = 0$$

אבל

$$\alpha_1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \alpha_1 + \alpha\alpha_1 = (1 + \alpha)\alpha_1$$

היות ו  $\alpha \neq -1$  נקבל ש  $\alpha_1 = 0$  ולכן הקבוצה גם בלתי תלויה לינארית  
לפי משפט השלישי חינם נקבל שהיא בסיס.

10. נוכיח את סעיף ב' ולכן ממילא א' לא נכון  
היות ונתון

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

נקבל ש

$$v_3 = -v_1 - v_2$$

כלומר

$$v_3 \in \text{span}(v_1, v_2)$$

לכן

$$\text{span}(v_3) \subseteq \text{span}(v_1, v_2) = \text{span}(v_1) + \text{span}(v_2)$$

כלומר

$$\text{span}(v_1) + \text{span}(v_2) + \text{span}(v_3) = \text{span}(v_1) + \text{span}(v_2) = \text{span}(v_1, v_2)$$

המימד של

$$\text{span}(v_1, v_2)$$

הוא לכל היותר 2 כי הוא נפרש על ידי שני וקטורים. לכן לא ייתכן כי

$$\text{span}(v_1, v_2) = V$$

כי  $V$  הוא מרחב וקטורי ממימד 3.