מדעי המח מד"ר תשפג מועד א

1. מצאו פתרון למד"ר $y'=\frac{2x}{y+x^2y}$ המקיים $y(0)=-2$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון.

$$y'=\frac{2x}{y+x^2y}=\frac{2x}{y\left(1+x^2\right)}$$

ולכן $yy'=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}$. זוהי מדר פרידה ובכתיב אחר:

$$y\mathrm{dy}=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}\mathrm{dx}$$

ונעשה אינטגרלים לשני האגפים (כל אחד לפי המשתנה שלו).

$$\frac{y^2}{2}=\ln\left(1+x^2\right)+C$$

ולכן

$$y=\pm\sqrt{2\ln\left(1+x^2\right)+C}$$

(זה לא אותו C ממקודם). נציב תנאי התחלה

$$-2=y(0)=-\sqrt{2\ln\left(1+0^2\right)+C}$$

(חייבים לבחור את הפתרון עם המינוס) ואז

$$4=C$$

ולכן הפתרון הסופי הוא

$$y=-\sqrt{2\ln\left(1+x^2\right)+4}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\left(x+y^{2}\right)\mathrm{dx}-2xy\mathrm{dy}=0$ המקיים $y(1)=1$.

פתרון: נבדוק אם המד"ר מדוייקת. נסמן

$$P\left(x,y\right)=x+y^{2}$$
$$Q\left(x,y\right)=-2xy$$

ואז

$$P_{y}=2y\quad Q_{x}=-2y$$

ולכן היא אינה מדויקת. נדייק אותו בעזרת

$$\mu(x)=e^{\int\frac{P_{y}-Q_{x}}{Q}\mathrm{dx}}=e^{\int\frac{2y+2y}{-2xy}\mathrm{dx}}=e^{-2\int\frac{1}{x}\mathrm{dx}}=e^{-2\ln(x)}=x^{-2}$$

כלומר: נסתכל על המד"ר השקולה שכעת מדויקת:

$$\frac{\left(x+y^{2}\right)}{x^{2}}\mathrm{dx}-\frac{2y}{x}\mathrm{dy}$$

ונגדיר מחדש

$$P\left(x,y\right)=\frac{x+y^{2}}{x^{2}}$$
$$Q\left(x,y\right)=-\frac{2y}{x}$$

וכעת נגדיר

$$U\left(x,y\right)=\int Q\left(x,y\right)\mathrm{dy}=-\frac{y^{2}}{x}+c(x)$$

ונמצא את $c(x)$. כיוון שצריך $U_{x}=P$, נשווה בניהם:

$$U_{x}=\frac{y^{2}}{x^{2}}+c'(x)=\frac{x+y^{2}}{x^{2}}$$

לכן

$$c'(x)=\frac{x+y^{2}}{x^{2}}-\frac{y^{2}}{x^{2}}=\frac{1}{x}$$

ולכן $c(x)=\ln|x|$. מכאן ש $U(x,y)=C$ או

$$-\frac{y^2}{x}+\ln|x|=C$$

ולכן

$$\pm\sqrt{x\left(\ln|x|+C\right)}=y$$

ונציב תנאי התחלה.

$$1=y(1)=\pm\sqrt{1\left(\ln|1|+C\right)}$$

ולכן צריך לבחור את הפתרון החיובי ובנוסף $C=1$. לסיכום:

$$y=\sqrt{x\left(\ln|x|+1\right)}.$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y''-3y'+2y=e^x$ המקיים $y(0)=2, y'(0)=2$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y''-3y'+2y=0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

בעל שורשים $1,2$ ולכן e^x,e^{2x} בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x)=e^x$ שמתאים ל 1 שהינו שורש של הפולינום האופייני, ננחש פתרון מהצורה $y_p=\alpha xe^x$. מתקיים

$$y_p'=\alpha\left(1+x\right)e^x$$
$$y_p''=\alpha\left(2+x\right)e^x$$

ונציב במד"ר

$$e^x = \alpha(2+x)e^x - 3\alpha(1+x)e^x + 2\alpha x e^x$$
$$= [(2+x) - 3(1+x) + 2x]\,\alpha e^x$$
$$= -\alpha e^x$$

ונקבל $\alpha = -1$. לסיכום:

$$y_p = -xe^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = -xe^x + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

ו

$$y' = -(1+x)e^x + C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$2 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$2 = y'(0) = -1 + C_1 + 2C_2$$

ולכן $C_1 = 2 - C_2$ ו $C_1 = 3 - 2C_2$. מכאן ש $3 - 2C_2 = 2 - C_2$ ולכן $C_2 = 1$ ואז $C_1 = 2 - 1 = 1$. לסיכום:

$$.y = -xe^x + e^x + e^{2x}$$

.4

.5 כדור בעל מסה $m = 1\text{kg}$ נעזב במהירות התחלתית אפס. מה תהיה מהירות הכדור לאחר 2 שניות כאשר: (בשתי הסעיפים לצורך הפשטות ניתן להניח כי קבוע תאוצת כדור הארץ הוא $g = 10$).

(א) הכח היחיד הפועל על הכדור הוא כח המשיכה mg.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מטה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1\cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון החיובי. לכן הכח הוא g. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$g = ma = a$$

או $g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0)=0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0 = y'(0) = g\cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = gt$. המהירות לאחר 2 שניות היא $y'(2) = g\cdot 2 = 20$ (מטר לשניה).

(ב) הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה mg וכוח התנגדות האוויר שגודלו שווה לגודל המהירות v

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מטה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1\cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון החיובי. בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $g-v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$g - v = ma = a$$

או $g - y'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + z = g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x)=1, b(x)=g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C + \int ge^{x}\mathrm{dx}\right) = e^{-x}\left(C + ge^{bx}\right) = e^{-x}C + g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-t}C + g$$

או

$$.y'(t) = e^{-t}C + g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0 = y'(0) = e^{-0}C + g = C + g$$

ומכאן $C = -g$. מכאן שהמהירות אחרי 2 שניות היא

$$.y'(2) = e^{-2} \cdot (-g) + g = g\left(1 - e^{-2}\right)$$