3. א. מצאו את הזוית בין הוקטור $(1,1,1)$ לבין הישר המאונך למישור $x-y-z=1$.
ב. מצאו את נקודת החיתוך בין המישור מסעיף א' לישר המאונך לו ועובר בנקודה $(1,1,1)$.

סעיף א:

הכיוון המאונך למישור הוא

$$(1,-1,-1)$$

כעת, נעזר במכפלה הסקלרית, ונזכר כי

$$v\cdot u=|v|\cdot|u|\cdot\cos(\theta)$$

נציב את הוקטור הנתון ואת הנורמל למישור

$$(1,1,1)\cdot(1,-1,-1)=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\theta)$$

תזכורת:

$$|(a,b,c)|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

לכן קיבלנו

$$-1=3\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta)=-\frac{1}{3}$$

$$\theta=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\approx 109^\circ$$

סעיף ב':

הישר המאונך למישור ועובר בנקודה $(1,1,1)$ הוא בצורה פרמטרית

$$(1,1,1)+t(1,-1,-1)=(1+t,1-t,1-t)$$

אנחנו רוצים נקודה על הישר, שנמצאת גם במישור, כלומר מקיימת את משוואת המישור.

$$1+t-(1-t)-(1-t)=1$$

$$-1+3t=1$$

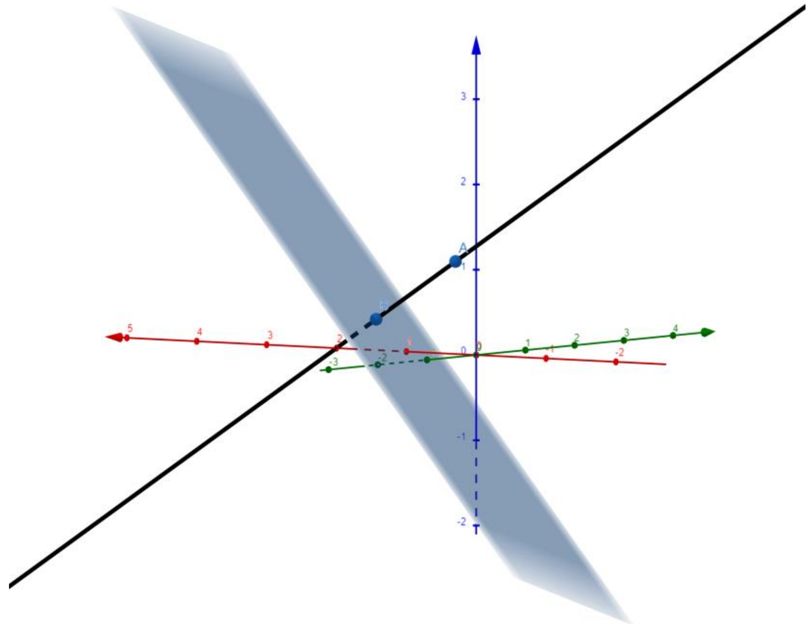
$$3t=2$$

$$t=\frac{2}{3}$$

ולכן נקודת החיתוך היא

$$\left(1+\frac{2}{3},1-\frac{2}{3},1-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

המחשה בדף הבא:



7. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A \in B$ וכן $C \cap A \neq \emptyset$ אזי $C \in B$.

ב. לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A \subseteq B \cap C$ אזי $A \setminus B = A \setminus C$.

סעיף א':

הפרכה:

$$A = \{1\}, C = \{1,2\}$$

אכן $C \cap A \neq \emptyset$

נבחר

$$B = \{\{1\}\}$$

אכן

$$A \in B$$

אבל

$$C \notin B$$

סעיף ב':

נתחיל בלנסות להציב קבוצות ריקות.

אם A ריקה, שני הצדדים אמת.

אם B ריקה, אז הנתון הוא $A \subseteq \emptyset$ ולכן A ריקה, ושוב הטענה מתקיימת.

לא מצאנו הפרכה קלה, ננסה להוכיח את הטענה.

נתון:

$$A \subseteq B \cap C$$

צ"ל:

$$A \setminus B = A \setminus C$$

נעשה הכלה דו כיוונית.

ראשית, יהי $x \in A \setminus B$ צ"ל כי $x \in A \setminus C$

נתון $x \in A$ וכן $x \notin B$

כיוון ש$x \in A$ וכן $A \subseteq B \cap C$ נובע כי $x \in B \cap C$ לכן $x \in B$ וקיבלנו סתירה.

אבל לא הנחנו בשלילה, אז כיצד הגענו לסתירה?

הסתירה היא ליהי $x \in A \setminus B$.

למעשה הוכחנו בלי לשים לב כי $A \setminus B = \emptyset$

באופן דומה לחלוטין אפשר להוכיח כי $A \setminus C = \emptyset$ ולכן אכן $A \setminus B = A \setminus C$.

שימו לב – לא עשינו בסוף את ההכלה הדו כיוונית שהתכוונו, אלא הוכחנו ששתי הקבוצות ריקות ולכן שוות.

6. <u>הגדרה:</u> תהי X קבוצת קבוצות של מספרים. X נקראת <u>אחלה קבוצה של קבוצות</u> אם

$$\forall A \in X \forall B \in X: (A \cap B \neq \emptyset) \to A = B$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש X אינה אחלה קבוצה של קבוצות.

ב. קבעו **והוכיחו** לכל קבוצה אם היא אחלה קבוצה של קבוצות:

$X = \emptyset$ $\qquad$ $Y = \{\{2n, 2n-1\} | n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $Z = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

$$\forall A \in X \forall B \in X: (A \cap B \neq \emptyset) \to (A = B)$$

נתחיל בשלילה

$$\exists A \in X \exists B \in X: (A \cap B \neq \emptyset) \land (A \neq B)$$

נעבור לדוגמאות

$$X = \emptyset$$

עבורה הפסוק הירוק מתקיים באופן ריק! ולכן היא אחלה קבוצה של קבוצות.

תזכורת: לכל פרדיקט $P(x)$ הטענה

$$\forall x \in \emptyset: P(x)$$

היא אמת.

$$Y = \{\{2n, 2n-1\} | n \in \mathbb{N}\} = \{\{2,1\}, \{4,3\}, \{6,5\}, \dots\}$$

ננסה להוכיח את הפסוק הירוק, כלומר כי מדובר באחלה קבוצה של קבוצות.

תהיינה $A, B \in Y$ כך ש

$$A \cap B \neq \emptyset$$

צ"ל כי

$$A = B$$

נסמן

$$A = \{2k, 2k - 1\}$$

$$B = \{2m, 2m - 1\}$$

נתון כי יש חיתוך לא ריק בין שתי הקבוצות, כלומר אחד המספרים נמצא בשתיהן.

או $2k$ בשתי הקבוצות, או $2k - 1$.

אם $2k \in B$ כיוון שהוא זוגי, וכיוון ש $2m - 1$ אינו זוגי, נובע כי

$$2k = 2m$$

ולכן $m = k$ ולכן אכן $A = B$.

אם $2k - 1$ בחיתוך, מסיקים באופן דומה כי $A = B$ ומ.ש.ל

לבסוף נעבור לאוסף הקבוצות

$$Z = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$

זו אינה אחלה קבוצה של קבוצות, נוכיח את הפסוק האדום.

נבחר

$$A = \{1,2\}$$

$$B = \{1,3\}$$

ואכן

$$A \cap B = \{1\} \neq \emptyset$$

וכן

$$A \neq B$$

6. <u>הגדרה:</u> פונקציה f נקראת **על** אם היא מקיימת את התנאי $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$

א. נסח תנאי השקול לכך ש f **אינה** על

ב. קבע **והוכח** אילו מהפונקציות הבאות על ואילו אינן על:

$$h(x) = x^2 + x \,,\ g(x) = 2x + 3 \,, f(x) = x^2$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}: f(x) = y$$

נתחיל מהשלילה

$$\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: f(x) \neq y$$

נעבור לדוגמאות:

$$f(x) = x^2$$

נוכיח כי הפונקציה הזו אינה על, כלומר נוכיח את הפסוק האדום, נבחר

$$y = -1$$

ואכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$x^2 \neq -1$$

כעת

$$g(x) = 2x + 3$$

נוכיח כי פונקציה זו אכן על, כלומר מקיימת את הפסוק הירוק.

יהי $y \in \mathbb{R}$

צריך להוכיח כי קיים $x \in \mathbb{R}$ עבורו

$$2x + 3 = y$$

בעצם y הוא פרמטר, וx הוא המשתנה וצריך לפתור את המשוואה.

$$2x = y - 3$$

$$x = \frac{y - 3}{2}$$

אכן אם נבחר את x להיות המספר $\frac{y-3}{2}$ יתקיים כי $g(x) = y$.

המחשה:

למשל אם $y = 1$ נקבל $x = -1$. ואכן

$$g(-1) = 2(-1) + 3 = 1$$

הרחבה:

ננסה להוכיח את הפסוק הירוק עבור הדוגמא הראשונה $f(x) = x^2$

ברור שנכשל, שהרי הוכחנו כי הפסוק האדום הוא אמת במקרה זה, אבל בואו נראה היכן נתקע.

יהי $y \in \mathbb{R}$

צריך להוכיח שקיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש

$$x^2 = y$$

לכאורה נבחר

$$x = \sqrt{y}$$

אבל זה כלל לא מוגדר עבור $y < 0$ ומכאן גם מוצאים את הכיוון להפרכה.

כעת

$$h(x) = x^2 + x$$

ננסה להוכיח:

יהי $y \in \mathbb{R}$

צריך להוכיח כי קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש

$$x^2 + x = y$$

$$x^2 + x - y = 0$$

יש פתרון למשוואה אם ורק אם הדיסקרימיננטה גדולה או שווה אפס

$$1^2 + 4y \geq 0$$

תזכורת:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשל עבור $y = -1$ נקבל

$$x^2 + x + 1 = 0$$

משוואה ריבועית שאין לה פתרון, ובעצם הוכחנו את הפסוק האדום.

5. פתור את האינטגרל $\int \sin(\ln(t))dt$ (רמז: הצבה $x=\ln(t)$)

$$\int \sin(\ln(t))\,dt = \left\{\begin{matrix} x=\ln(t) \\ dx=\frac{1}{t}dt \\ t=e^x \\ dt=e^x dx \end{matrix}\right\} = \int \sin(x)\,e^x dx = \left\{\begin{matrix} f'=e^x & g=\sin(x) \\ f=e^x & g'=\cos(x) \end{matrix}\right\} = e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} f'=e^x & g=\cos(x) \\ f=e^x & g'=-\sin(x) \end{matrix}\right\} = e^x\sin(x) - \left[e^x\cos(x) + \int e^x\sin(x)\,dx\right]$$

נעבור לחישוב בצד:

קיבלנו כי

$$\int e^x\sin(x)\,dx = e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\,dx$$

נעביר אגף ונחלק ב2 ונקבל

$$\int e^x\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin(x)-\cos(x)) + C$$

נחזור לאינטגרל המקורי

$$\int \sin(\ln(t))\,dt = \{x=\ln(t)\} = \int e^x\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin(x)-\cos(x)) + C = \frac{1}{2}t(\sin(\ln(t))-\cos(\ln(t))) + C$$

6. <u>הגדרה:</u> אוסף R של זוגות של מספרים טבעיים נקרא **אנטי-סימטרי** אם

$$\forall a\in\mathbb{N}\forall b\in\mathbb{N}:\big((a,b)\in R\wedge(b,a)\in R\big)\rightarrow(a=b)$$

א. נסחו תנאי השקול לכך שהאוסף R אינו אנטי-סימטרי.

ב. קבעו **והוכיחו** אילו מן האוספים הבאים הינם אנטי-סימטרים ואילו אינם אנטי-סימטריים:

$$T=\left\{(n,m)\left|\frac{n-m}{2}\in\mathbb{Z}\right.\right\},\ S=\{(\mathrm{n},\mathrm{n}+1)\mid\mathrm{n}\in\mathbb{N}\}\ ,R=\{(1,2),(2,1),(1,1)\}$$

$$\forall a\in\mathbb{N}\forall b\in\mathbb{N}:\big((a,b)\in R\wedge(b,a)\in R\big)\to(a=b)$$

השלילה

$$\exists a\in\mathbb{N}\exists b\in\mathbb{N}:(a,b)\in R\wedge(b,a)\in R\wedge(a\neq b)$$

נעבור לדוגמאות

$$R=\{(1,2),(2,1),(1,1)\}$$

נוכיח כי אוסף זה אינו אנטי-סימטרי, כלומר נוכיח את הפסוק האדום.

נבחר

$$a=1$$
$$b=2$$

ואכן

$$(1,2)\in R$$

$$(2,1)\in R$$

$$1\neq2$$

כעת הדוגמא הבאה היא

$$S=\{(n,n+1)|n\in\mathbb{N}\}=\{(1,2),(2,3),(3,4),\dots\}$$

יהיו $a,b\in\mathbb{N}$ כך ש

$$(a,b)\in S$$

$$(b,a)\in S$$

צ"ל כי $a=b$

כיוון ש$(a,b)\in S$ נובע כי $b=a+1$

מצד שני, כיוון ש $(b,a)\in S$ נובע כי $a=b+1$

כלומר אם נציב את המשוואה השנייה בראשונה נקבל כי

$$b = b + 2$$

סתירה.

כלומר הנתון $(a, b) \in S \wedge (b, a) \in S$ תמיד שקרי, ולכן הגרירה היא אמת.

זה בעצם סוג של מצב "נכון באופן ריק" שהרי אין זוגות a, b בכלל המקיימים את התנאי שבפסוק.

לכן, אכן, S אוסף אנטי-סימטרי.

כעת נעבור לאוסף האחרון

$$T = \left\{(n, m) \middle| \frac{n - m}{2} \in \mathbb{Z}\right\}$$

נוכיח כי האוסף אינו אנטי-סימטרי, כלומר נוכיח את הפסוק האדום

נבחר

$$a = 2, b = 4$$

אכן

$$(2,4), (4,2) \in T$$

אבל

$$2 \neq 4$$

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^{2n-1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \frac{\ln(2) + \ln(n)}{2}$

בדיקה:

עבור $n = 1$ צ"ל

$$\sum_{k=1}^{1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \frac{\ln(2) + \ln(1)}{2}$$

צ"ל

$$\ln(\sqrt{2}) = \frac{\ln(2)}{2}$$

אכן

$$\ln(\sqrt{2}) = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

כעת יהי n עבורו הטענה נכונה, כלומר נתון כי

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \frac{\ln(2) + \ln(n)}{2}$$

צ"ל את הטענה ה$n+1$ כלומר צ"ל כי

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)-1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \frac{\ln(2) + \ln(n+1)}{2}$$

נפתח את צד שמאל:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \left[\sum_{k=1}^{2n-1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right)\right] + \ln\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{2n+2}{2n+1}}\right) =$$

שימו לב: בין שתי הסיגמות היה הבדל של $k = 2n, 2n+1$

$$= \frac{\ln(2) + \ln(n)}{2} + \ln\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{2n+2}{2n+1}}\right) =$$

$$= \frac{\ln(2) + \ln(n)}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(2) + \ln(n) + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(2) + \ln(n) + \ln(2n+1) - \ln(2n) + \ln(2n+2) - \ln(2n+1)] =$$

שימו לב כי $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$

$$= \frac{1}{2}[\ln(2n+2)] = \frac{\ln\big(2(n+1)\big)}{2} = \frac{\ln(2) + \ln(n+1)}{2}$$

מ.ש.ל.

שאלה 4:

א. הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

ב. הסיקו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$$

נתחיל דווקא מסעיף ב', בהנחה שהטענה בסעיף א' נכונה.

יהי $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

סעיף א':

בדיקה, עבור $n = 1$ צ"ל כי

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$$

ואכן

$$1 \leq 1$$

יהי n עבורו הטענה נכונה, כלומר נתון כי

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

צ"ל את הטענה ה$n + 1$ כלומר צ"ל כי

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

נפתח את צד שמאל

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right] + \frac{1}{(n+1)^2} \underbrace{\leq}_{\text{הנחת האינדוקציה}} \left[2 - \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{(n+1)^2} \underbrace{\leq}_{\text{רוצים להוכיח}} 2 - \frac{1}{n+1}$$

כלומר מספיק להוכיח כי

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

צ"ל

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

צ"ל

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1-n}{n(n+1)}$$

צ"ל כי

$$\frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+n}$$

כיוון שהכל חיובי נבצע כפל בהצלבה

$$n^2+n \leq n^2+2n+1$$

צ"ל

$$0 \leq n+1$$

וזה אכן אמת.

7. הוכח כי לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $C \setminus (A \setminus B) = (C \setminus A) \cup (C \cap B)$

תהיינה A,B,C צ"ל שיוויון בין קבוצות, נבצע הכלה דו כיוונית.

(הערה: לצורך נוחות ההקלדה, במקום $A \setminus B$ נכתוב $A - B$.)

בכיוון ראשון, יהי $x \in C - (A - B)$

צ"ל כי $x \in (C - A) \cup (C \cap B)$

נתון כי

$$x \in C$$

$$x \notin A - B$$

נעצור רגע לתרגיל צד, שלא בטוח נחוץ אבל עשוי לעזור

$$x \notin A \setminus B \equiv$$

$$\equiv \neg(x \in A \setminus B) \equiv$$

$$\equiv \neg(x \in A \land x \notin B) \equiv$$

$$\equiv x \notin A \lor x \in B$$

נפתור ללא תרגיל העזר

אנחנו צריכים להוכיח כי $x \in C - A$ או $x \in C \cap B$

נחלק למקרים אם $x \in A$ או $x \notin A$.

אם $x \notin A$ אזי כיוון ש $x \in C$ נובע כי $x \in C - A$ וסיימנו.

אחרת, $x \in A$ אבל נתון כי $x \notin A - B$ ולכן $x \in B$ ויחד עם העובדה כי $x \in C$ סה"כ $x \in C \cap B$ וסיימנו.

בכיוון שני,

יהי

$$x \in (C - A) \cup (C \cap B)$$

צ"ל כי

$$x \in C - (A - B)$$

נתון כי $x \in C - A$ או $x \in C \cap B$

נחלק למקרים, $x \in C - A$ או $x \notin C - A$.

אם $x \in C - A$ אזי $x \in C$ וכן $x \notin A$

צ"ל $x \in C$ (שזה ממש נתון פה) וכן כי $x \notin A - B$

אבל כיוון ש $x \notin A$ אכן $x \notin A - B$ וסיימנו.

אחרת, $x \notin C - A$ ולכן מהנתון $x \in C \cap B$.

כלומר $x \in C$ וכן $x \in B$

צ"ל כי $x \in C$ (שזה שוב נתון פה) וכן כי $x \notin A - B$

אבל כיוון ש $x \in B$ אכן $x \notin A - B$ וסיימנו.

מ.ש.ל

3. הצג את הוקטור $(1,2)$ בצורה $(1,2) = (a,b) + (x,y)$
כאשר (a,b) בכיוון הוקטור $(1,1)$, והוקטור (x,y) **מאונך** לוקטור $(1,1)$

בעצם אנחנו צריכים למצוא 4 פרמטרים x, y, a, b ונקווה שיש לנו מספיק משוואות לצורך זה.

כיוון ש (a,b) בכיוון $(1,1)$ זה אומר כי

$$(a,b) = t(1,1) = (t,t)$$

כמו כן, מספרים לנו כי (x,y) מאונך ל$(1,1)$

$$(1,1) \cdot (x,y) = 0$$

$$x + y = 0$$

$$y = -x$$

כלומר

$$(x,y) = (x,-x)$$

לכן צריך למצוא x, t כך ש

$$(1,2) = (t,t) + (x,-x)$$

$$1 = t + x$$

$$2 = t - x$$

נסכום את המשוואות ונקבל כי

$$3 = 2t$$

$$t = \frac{3}{2}$$

נציב במשוואה הראשונה

$$x = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

סה"כ

$$(1,2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

2.

א. מצא את כל הפתרונות למשוואה $z^5 = z$

ב. הוכח כי למשוואה $\bar{z}z + 1 = 0$ אין פתרון

נתחיל מסעיף ב':

נסמן

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2$$

אכן כיוון ש $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 + b^2 + 1 \geq 1 \neq 0$$

כעת נעבור לסעיף א':

$$z(z^4 - 1) = 0$$

לכן $z = 0$ או $z^4 = 1$

פתרנו כבר בעבר את $z^4 = 1$ והפתרונות הם $\pm 1, \pm i$

סה"כ מצאנו 5 פתרונות

$$0, \pm 1, \pm i$$

2.

א. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $z^2-(1+i)^8=0$

ב. יהי $w\in\mathbb{C}$ המקיים $w^n=1$ וגם $w\neq 1$. הוכיחו כי $w^n+w^{n-1}+...+w=0$.

(רמז: סכום סדרה הנדסית $1+q+q^2+...+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$)

סעיף א':

$$z^2=(1+i)^8$$

זו משוואה מהצורה חזקה של z שווה לקבוע.

(הערה זה נכון כי $z=\pm(1+i)^4$.)

איך נחשב חזקות? נעבור לצורה הגאומטרית

$$(1+i)^8=\left(\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^8=2^4cis\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2^4cis(2\pi)=2^4cis(0)=2^4=16$$

$$z^2=16$$

$$z=\pm 4$$

סעיף ב':

$$w+w^2+\cdots+w^n=w+w^2+\cdots+w^{n-1}+w^n=w+w^2+\cdots+w^{n-1}+1=$$

$$=1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=\frac{1-w^n}{1-w}=\frac{0}{1-w}=0$$

דרך נוספת:

$$w+w^2+\cdots+w^n=w(1+w+\cdots+w^{n-1})=w\cdot\frac{1-w^n}{1-w}=0$$

4. הוכח כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $1^2+2^2+...+n^2<\frac{(n+1)^3}{3}$

בדיקה:

עבור $n=1$

$$1^2<\frac{2^3}{3}$$

אכן מתקיים

יהי n עבורו

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 < \frac{(n+1)^3}{3}$$

צ"ל כי

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 < \frac{(n+2)^3}{3}$$

נפתח את צד שמאל

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + (n+1)^2 \underbrace{\le}_{\text{הנחת האינדוקציה}} \frac{(n+1)^3}{3} + (n+1)^2 = (n+1)^2\left[\frac{n+1}{3} + 1\right] =$$

$$= (n+1)^2 \cdot \frac{n+4}{3} \underbrace{\le}_{\text{רוצים להוכיח}} \frac{(n+2)^3}{3}$$

צ"ל כי

$$(n+1)^2(n+4) \le (n+2)^3$$

נפתח, לצערנו, סוגריים

$$(n^2+2n+1)(n+4) \le n^3 + 3n^2 \cdot 2 + 3n \cdot 2^2 + 2^3$$

$$n^3 + 2n^2 + n + 4n^2 + 8n + 4 \le n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

אחרי צמצום צ"ל כי

$$-4 \le 3n$$

וזה כמובן נכון תמיד.