1

אם G אבלית אזי כל תת-חבורה H היא נורמלית.

הוכחה

ניקח $g \in G$ ו-$h \in H$. $g^{-1}hg = hg^{-1}g = he = h \in H$

2

G חבורה. תת חבורה $Z(G) = \{x \in G : \forall_{g \in G} xg = gx\}$ ("=המרכז של G") היא נורמלית.

הוכחה

ניקח $g \in G$ ו-$h \in Z(G)$.

$$g^{-1}hg = \left(g^{-1}h\right)g = \left(hg^{-1}\right)g = hg^{-1}g = he = h \in H$$

3

ניקח $G = S_3$ (חבורת התמורות בשלושה איברים). נביט באיבר $\pi = (3)(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\pi^2 = id$$

$$\langle \pi \rangle = \{\pi, id\}$$

ניקח $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\sigma^2 = id \Rightarrow \sigma^{-1} = \sigma$$

$$\sigma\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \notin \langle \pi \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \pi \rangle \ntrianglelefteq G$$

4

הראו כי יש ל$GL_2\left(\mathbb{Q}\right)$ תת חבורה לא נורמלית.
דוגמה לתת חבורה נורמלית - מטריצות 2×2 מ$\det=1$ כלומר $H=SL_2\left(\mathbb{Q}\right)$

$$h^{-1}hg\overset{?}{\in}H$$

$$\left|g^{-1}hg\right|=\left|g^{-1}\right|\left|h\right|\left|g\right|=\left|h\right|\left|g\right|^{-1}\left|g\right|=\left|h\right|=1$$

$$H\triangleleft G$$

תרגיל בית

הראו שאם $H\triangleleft G$ אז לכל $g\in G$ $H\le G$ $\langle g\rangle$.

תרגיל

יהיו $A,B\trianglelefteq G$. הוכח $A\cap B\trianglelefteq G$

הוכחה

יהי $h\in A\cap B$ ויהי $g\in G$.

$$\left.\begin{array}{l} h\in A\trianglelefteq G\Rightarrow g^{-1}hg\in A\\ h\in B\trianglelefteq G\Rightarrow g^{-1}hg\in B\end{array}\right\}\Rightarrow g^{-1}hg\in A\cap B$$

תרגיל

$H\le G$, $[G:H]=2$ (=מספר המחלקות הימניות=מספר המחלקות השמאליות). הוכח כי $H\triangleleft G$

פתרון

$G=A_1\uplus A_2$ כאשר A_1,A_2 הן המחלקות הימניות של H בG.
H היא מחלקה שמאלית וגם ימנית של עצמה $He=eH=H$, ולכן בה"כ ניתן לומר כי $M=A_1=B_1$, ואז $A_2=B_2=G\setminus H$, ואז לכל $g\in G\backslash H$, $gH=A_2=G\backslash H=B_2=Hg$, ולכל $g\in H$ $gH=H=Hg \Leftarrow H\trianglelefteq G$

דוגמה

$$G=S_3,\ \pi=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \langle\pi\rangle=\left\{\pi,\pi^2,id\right\}$$

$$o\left(\pi\right)=\left|\langle\pi\rangle\right|=3$$

$$\left[G:\langle\pi\rangle\right]=\frac{|G|}{|\langle\pi\rangle|}=\frac{6}{3}=2$$

לכן לפי התרגיל הקודם $\langle\pi\rangle\triangleleft G$

הגדרות

בהינתן הומומורפיזם $\varphi:G\to H$, הגרעין של φ $\ker\varphi=\{g\in G:\varphi\left(g\right)=e_H\}$, $\mathrm{Im}\varphi=\{\varphi\left(g\right):g\in G\}$

משפט

$$\ker\varphi\trianglelefteq G\qquad \mathrm{Im}\varphi\leq H$$

הערה

$\mathrm{Im}\varphi$ היא לאו דווקא תת חבורה נורמלית של H.

דוגמה

$\varphi:G\to H$ כאשר $G\leq H$ לא נורמלית וφ זה השיכון ואז $\mathrm{Im}\left(\varphi\right)=G$

$$H=S_3,\ G=\langle\pi\rangle,\ \pi=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(id\right)=id,\varphi\left(\pi\right)=\pi$$

$$\mathrm{Im}\left(\varphi\right)=\{id,\pi\}$$

הערה

המשפט הזה מספק קריטריון נוסף לנורמליות, כלומר $H\triangleleft G$ אם קיים הומומורפיזם $\varphi:G\to K$ כך ש$\{g\in G:\varphi\left(g\right)=e_k\}=\ker\left(\varphi\right)=H$

תרגיל

תהיינה שתי חבורות A,B. מצאו שתי תת-חבורות נורמליות של $A\times B$

פתרון

נסמן $\bar{A}=\{(a,e_B):a\in A\}$, $\bar{B}=\{(e_A,b):b\in B\}$.

$$\bar{A}\cong A \quad \bar{B}\cong B$$

$$\bar{A},\bar{B}\triangleleft A\times B$$

$$\varphi:A\times B\to A$$

$$\varphi(a,b)=a$$

$$\ker(\varphi)=\bar{B}\Rightarrow\bar{B}\triangleleft A\times B$$

משפט

$\varphi:G\to H$ מונומורפיזם $\Leftrightarrow \ker(\varphi)=\{e_G\}$

תרגיל

תהיינה $N,H\leq G$ הוכיחו כי אם $N\trianglelefteq G$ אזי $NH\leq G$

פתרון

[היה תרגיל בית שלפיו $NH\leq G\Leftrightarrow NH=HN$]

יהי איבר $ab\in NH$ ($a\in N$, $b\in H$). כעת N היא נורמלית ולכן $Nb=bN$, כלומר קיים $c\in N$ כך ש-$ab=bc$. עכשיו $bc\in HN$ ולכן $ab\in HN$.

תרגיל

$N,H\trianglelefteq G$. הוכח $NH\triangleleft G$

פתרון

יהיו $a\in N$, $b\in H$, $g\in G$.

$$g^{-1}abg=g^{-1}agg^{-1}bg\in NH$$

תרגיל

G חבורה. $H\leq G$ הנוצרת על ידי כל הריבועים ב-G. $H=\langle g^{-2}:g\in G\rangle$. הוכח $H\triangleleft G$

פתרון

ניקח $h \in H$, כלומר קיימים $G \ni h_1, ...h_n$ כך ש $h = h_1^2 h_2^2 ... h_n^2$. יהי $g \in G$.

$$g^{-1}hg = g^{-1}h_1^2...h_n^2 g$$

$$= g^{-1}h_1^2 g g^{-1} h_2^2 h ... h^{-1} h_n^2 g$$

$$= \left(g^{-1}h_1 g\right)^2 \left(g^{-1}h_2 h\right)^2 ... \left(g^{-1}h_n g\right)^2 \in H$$

$$\Rightarrow H \triangleleft G$$

חבורות מנה

בבדידה לקחנו איכשהו יחס שקילות ~ וקיבלנו מחלקות שקילות $^{M}/_{\sim}$. אצלנו מה שיקרה זה שלוחקים G ולוקחים $H \triangleleft G$ (זה אומר יש מחלקות $H_1, ...H_n$ שכן גם ימניות וגם שמאליות). $^{G}/_{\sim} = \boxed{^{G}/_{H}}$ - חבורה. $a \sim b \Leftrightarrow a, b \in H$