# תרגיל בית 6 בקורס 89-214 סמסטר א' תשע"ד

**נהלים:** בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך ההגשה הוא בשבוע המתחיל ב-19.12.2013 לידי המתרגל.

**שאלה 1.** תהי $G$ חבורה ותהי $H \leq G$ תת־חבורה.

1. הוכיחו כי לכל $g \in G$ מתקיים כי $gHg^{-1}$ היא תת־חבורה של $G$ האיזומורפית ל-$H$.
2. הסיקו מן הסעיף הקודם כי אם $H$ היא תת־החבורה היחידה מסדר $n$ של $G$, אז $H \lhd G$.

**שאלה 2.** תהי $G$ חבורה. אם קיימת $\varnothing \neq S \subseteq G$ תת־קבוצה סופית כך שמתקיים $G = \langle S \rangle$, נאמר כי $G$ חבורה נוצרת סופית.
הוכיחו כי החבורה $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ אינה נוצרת סופית. הדרכה: מצאו איבר (מספר רציונלי) שלא נמצא בתת־חבורה $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ שנוצרת על ידי מספר סופי של איברים $x_1, \ldots, x_n$.

**שאלה 3.** בסעיפים הבאים תנו דוגמה שמפריכה את הטענות השגויות הבאות:

1. תהי $G$ חבורה ותהינה $A, B \lhd G$ תת־חבורות נורמליות. אם $G/A \cong B$, אז $G/B \cong A$.
2. תהי $G$ חבורה ותהינה $A, B \lhd G$ תת־חבורות נורמליות. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A \cong B$.
3. כל זוג חבורות לא אבליות $G, H$ מסדר $24$ הן איזומורפיות.

**שאלה 4.** יהי $F$ שדה. נזכיר כי חבורת הייזנברג מעל $F$ היא חבורת המטריצות

$$H(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in F \right\}$$

עם הפעולה של כפל מטריצות.

1. מצאו את המרכז $Z(H(F))$.
2. נניח כי $F$ שדה סופי, כלומר מסדר $|F| = q \in \mathbb{N}$. מצאו את $[H(F) : Z(H(F))]$.
הערה: למרות שזה לא דרוש לפתרון השאלה, זה "טוב לדעת" שכל שדה סופי הוא מסדר חזקת ראשוני, כלומר קיים $p$ ראשוני כך ש-$q = p^k$.

**שאלה 5.** תהי $G$ חבורה ותהי $H \leq G$ תת־חבורה. הוכיחו כי מתקיים $H \cap Z(G) \subseteq Z(H)$.

**שאלה 6.** בסעיפים הבאים תנו דוגמה לחבורה $G$ ולתת־חבורה $H \leq G$ שמקיימות את התנאי הרשום.

1. הכלה ממש $H \cap Z(G) \subset Z(H)$ (בשאלה הקודמת הוכחתם הכלה חלשה). רמז: חבורה דיהדרלית.

2. הכלה ממש $Z(H) \subset Z(G)$.

3. הכלה ממש $Z(G) \subset Z(H)$.

4. $Z(G)$ לא מכיל את $Z(H)$ ולא מוכל בו.

**שאלה 7.** תהי $G$ חבורה ותהי $A = \{a \in G : \exists n \in \mathbb{N}, a^n = e\}$ קבוצת האיברים מסדר סופי בחבורה $G$. הוכחנו בכיתה כי אם $G$ אבלית, אז $A \leq G$ תת־חבורה (שנקראת תת־חבורת הפיתול של $G$).

1. נניח כי $G$ אינה בהכרח אבלית, אבל בכל זאת $A$ היא תת־חבורה של $G$. הוכיחו כי $A \lhd G$ היא תת־חבורה נורמלית.

2. תחת ההנחה של הסעיף הקודם, הוכיחו שבחבורת המנה $G/A$ אין איברים מסדר סופי פרט לאיבר היחידה. רמז: הניחו בשלילה כי קיים איבר מסדר סופי בחבורה $G/A$, כלומר כי קיימים $x \notin A$ ו-$n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $(xA)^n = e_{G/A} = A$, והגיעו לסתירה.

**שאלה 8.** תהי $G$ חבורה לא אבלית מסדר $8$. הוכיחו כי קיימת תת־חבורה ציקלית של $G$ מסדר $4$. רמז: הסתכלו על הסדרים האפשריים לאיברי החבורה והוכיחו שקיים לפחות איבר אחד מסדר $4$.

**שאלת אתגר** (רשות) הכלילו את השאלה האחרונה: תהא $G$ חבורה לא אבלית מסדר $2^t$ עבור $t > 2$. אזי קיימת ב-$G$ תת־חבורה ציקלית מסדר $4$.

בהצלחה!