

תרגיל בית 5 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תש"ף

**שאלה 1.** (חימום) יהי  $\phi: G \rightarrow H$ ,  $\psi: H \rightarrow K$  הומומורפיזמים. הראו כי  $\phi \circ \psi$  הוא הומומורפיזם.  
**שאלה 2.** (חימום) תהי  $G, H$  חבורות ו  $\phi: G \rightarrow H$  מונומורפיזם. הראו כי עבור  $g \in G$  כך ש  $o(g) = n$  אזי  $o(\phi(g)) = n$ .  
**שאלה 3.** יהי  $\phi: G \rightarrow H$  הומומורפיזם.

- (1) הוכיחו כי אם  $G$  אבלית אזי גם  $\text{Im } \phi$  אבלית. הפריכו את הכיוון השני.
- (2) הסיקו מסעיף קודם כי אם  $G \cong H$  אזי  $G$  אבלית אם ורק אם  $H$  אבלית.
- (3) הוכיחו או הפריכו: קיים מונומורפיזם  $\phi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \rightarrow S_4$ .

**שאלה 4.** יהי  $p$  ראשוני. נאמר כי חבורה  $G$  הינה חבורת- $p$  אם הסדר של כל איבר בחבורה הוא חזקה כלשהי של  $p$ . יהי  $\phi: G \rightarrow H$  הומומורפיזם. הוכיחו כי אם  $G$  חבורת- $p$  אזי גם  $\text{Im}(\phi)$  חבורת- $p$ . הוכיחו או הפריכו את הכיוון השני.

**שאלה 5.** עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו ונמקו האם היא: הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

- (1)  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  המוגדרת לפי  $f(x) = x^3$ .
- (2)  $f: \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_5$  המוגדרת לפי:  $f(x) = x \pmod{5}$ .
- (3)  $f: S_7 \rightarrow \mathbb{Z}$  המוגדרת לפי:  $f(\sigma) = \sigma(1)$ .
- (4)  $f: S_5 \rightarrow GL_5(\mathbb{R})$  המוגדרת לפי:  $f(\sigma) = A : (A)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .
- (5)  $f_x: G \rightarrow G$  המוגדרת לפי:  $f_x(g) = xgx^{-1}$  כאשר  $x \in G$  איבר.
- (6)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$  המוגדרת לפי:  $f(z) = (z \pmod{4}, z \pmod{8}, z \pmod{2})$ .

**שאלה 6.** תהי  $G$  חבורה. נגדיר  $f: G \rightarrow G$  לפי  $f(g) = g^2$ .

- (1) הוכיחו כי  $f$  הוא הומומורפיזם אם ורק אם  $G$  אבלית.
- (2) נניח שהחבורה  $G$  אבלית וסופית. הוכיחו כי  $f$  הנ"ל היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של  $G$  הוא אי-זוגי.

**שאלה 7.** בכל אחד מהסעיפים הבאים הפרד או תן דוגמא לפונקציה מפורשת:

(1) האם יש אפימורפיזם:

$$f: \mathbb{Z}_{20} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$$

(2) האם יש מונומורפיזם:

$$f: S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{60}$$

**שאלה 8.** (רשות) הראו כי כל חבורה לא אבלית מסדר 6 איזומורפית ל  $S_3$ .