תרגיל 11 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. מצאו את כל תתי השדות של $\mathbb{Q}(\rho)$ כאשר $\rho = e^{\frac{2\pi i}{5}}$הוא שורש 5 פרימיטבי של 1. (ציירו את הסריג וציינו את המימדים)
פתרון: בדיוק באותה טכניקה שיש במערך תרגול. על קצה המזלג: חבורת גלואה היא $U_5 \cong \mathbb{Z}_4$. $\varphi : \rho \to \rho^2$ הוא יוצר. φ^2 יוצר את תת החבורה $\mathbb{Z}_2$. ומגיעים ש

$$\mathbb{Q}(\rho + \rho^4)$$

הוא השדה ביניים הלא טריויאלי היחיד.

הערה: אפשר למצוא את הפולינום המינימילי של $\rho + \rho^4$ (ע"י מציאת המסלול תחת חבורת גלואה) המסלול הוא

$$\rho + \rho^4, \rho^2 + \rho^3$$

ולכן הפולינום המינימלי הוא

$$(x - (\rho + \rho^4))(x - (\rho^2 + \rho^3)) = x^2 + x - 1$$

השורשים של הפולינום הם

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ולכן

$$\rho + \rho^4 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ולכן בעצם

$$\mathbb{Q}(\rho + \rho^4) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$

שזו צורה יותר ברורה להרחבת הביניים.

2. תהי $E/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה כך ש $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_n$ הוכיחו כי יש ל E תת שדה K כך ש $[K : \mathbb{Q}] = 2$.
פתרון: ל S_n יש תת חבורה A_n מאינדקס 2. לפי התאמת גלואה E^{A_n} הוא תת שדה כך ש $[E : E^{A_n}] = \frac{n!}{2}$ ולכן $[E^{A_n} : \mathbb{Q}] = 2$ כנדרש.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: יהיו F, E שדות סופיים. $|E| \mid |F|$ (הגודל של F מחלק את הגודל של E) אם ורק אם F איזומורפי לתת שדה של E.
פתרון: לא נכון. נניח $|F| = 4$ ו $|E| = 8$. אם F תת שדה של E אז E צריך להיות מרחב וקטורי מעל F כלומר מספר האיברים שלו צריך להיות $|F|^{\dim E}$ וזה לא ייתכן (8 אינו חזקה של 4)

4. יהי $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ פולינום אי פריק מדרגה 3 ויהי a שורש שלו (בשדה הפיצול). הוכיחו כי $a^{13} \in \mathbb{Z}_3$.

פתרון: שדה הפיצול הוא בדיוק השדה מגודל $3^3 = 27$. האיברים ההפיכים בשדה זה הם חבורה בגודל 26. a אכן הפיך (אחרת $a = 0 \in \mathbb{Z}_3$ ויש לפולינום שורש ב $\mathbb{Z}_3$ בסתירה) לפי משפט לגרנז' $a^{26} = 1$ ולכן

$$a^{13} = \pm 1 \in \mathbb{Z}_3$$

(זכרו שבשדה לפולינום $x^2 = 1$ יש לכל היותר 2 שורשים).