תרגיל 3 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. בשאלה הזאת כשכתוב "מצאו את השדה" הכוונה למצוא רשימה של איברים מ $\mathbb{R}$ שצריך לספח ל $\mathbb{Q}$ כדי לקבל את השדה הרצוי.

(א) מצאו את השדה $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

פתרון: נסמן $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ אז $F \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ אבל כמובן ש $F \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ כי שוויון יגרור ש $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ וזה כמובן לא נכון. עכשיו נשים לב ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : F][F : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$$

והיות ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : F] \neq 1$$

בהכרח

$$[F : \mathbb{Q}] = 1$$

כלומר $F = \mathbb{Q}$. .

(ב) מצאו את השדה $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

פתרון: נסמן תת שדה זה ב F. היות ש אף אחד מבין $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ו $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ לא מוכל בשני (נדלג על ההסבר של העובדה הזאת)

$$F \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), \quad F \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

בנוסף, קל לראות ש

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq F$$

כי הוא מוכל בשני השדות הנ"ל. לכן אם נוכיח ש $[F : \mathbb{Q}] = 2$ נקבל ש $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. נשים לב ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4$$

ולכן

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : F][F : \mathbb{Q}] = 4$$

היות ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : F] \neq 1, \quad [F : \mathbb{Q}] \neq 1$$

נקבל ש

$$[F : \mathbb{Q}] = 2$$

ובזה סיימנו.

2. נתון כי הפולינום המינימלי של a הוא $x^4 - 2x^3 + 4x - 6$. מצאו את הפולינום המינימלי של $2a + 1$.
פתרון: אם $f(x)$ פולינום מינימלי של a די ברור ש $f(\frac{x-1}{2})$ פולינום מינימלי של $2a+1$ כלומר הפולינום שאנחנו מחפשים הוא

$$(\frac{x-1}{2})^4 - 2(\frac{x-1}{2})^3 + 4(\frac{x-1}{2}) - 6$$

3. מצאו את הפולינום המינימלי של:

(א) $i + \sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}$.
פתרון: נסמן

$$x = i + \sqrt{2}$$

כלומר

$$x - \sqrt{2} = i$$

נעלה בריבוע ונקבל

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = -1$$

$$2\sqrt{2}x = x^2 + 3$$

$$8x^2 = x^4 + 6x^2 + 9$$

כלומר

$$x^4 - 2x^2 + 9$$

מאפס את $i + \sqrt{2}$. למה זהו פולינום אי פריק? קל לוודא ש

$$\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i + \sqrt{2})$$

ולכן

$$[\mathbb{Q}(i + \sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 4$$

ולכן הפולינום האי פריק הוא מדרגה 4 וזה הפולינום שמצאנו.

(ב) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
פתרון: ברור ש $(x - \sqrt{2})^2 - 3$ הוא פולינום המאפס את $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. זה פולינום ממעלה 2, אם הוא פריק אז

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

כלומר

$$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

שזה כמובן לא נכון. ולכן הפולינום האי פריק הוא

$$(x-\sqrt{2})^2-3=x^2-2\sqrt{2}x-1$$

(ג) $\sqrt[3]{7}$ מעל $\mathbb{Q}$.
פתרון: x^3-7 אי פריק לפי קריטריון אייזנשטיין.

(ד) $\sqrt[3]{7}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. רמז: העזרו בשיקולי מימד.
פתרון: כבר ראינו ש x^3-7 מאפס את $\sqrt[3]{7}$. השאלה היא האם הוא אי פריק ב $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$? נניח שהוא פריק. כלומר יש לו שורש $a\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. אז כמובן ש

$$\mathbb{Q}(a)\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$$

אבל

$$[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]=3$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}]=4$$

בסתירה לכפליות של הרחבת שדות. לכן x^3-7 אי פריק והוא הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{7}$ גם מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

4. (א) חשבו $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]$.
פתרון: נראה ש

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$$

ואז ברור שהתשובה היא 6. ברור ש

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$$

הקושי הוא בלהוכיח את הצד השני.
נסמן

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$$

אז

$$x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}$$

נעלה את זה בחזקת 3 ונקבל

$$x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}=2$$

כלומר

$$x^3+6x-2=(3x^2+2)\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{x^3 + 6x - 2}{(3x^2 + 2)}$$

משמע,

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2})$$

ולכן גם כמובן

$$\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2})$$

והשגנו את השוויון המבוקש.

(ב) חשבו $[\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{3}}) : \mathbb{Q}]$

פתרון: ברור ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$$

ננסה למצוא את הפולינום המינימלי של $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. ראשית נשים לב ש

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$$

למה? נניח בשלילה ש

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$$

אז

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$$

ואז

$$2 + \sqrt{3} = a^2 + 2\sqrt{3}ab + 3b^2$$

כלומר, אם $ab \neq \frac{1}{2}$ אז

$$\sqrt{3} = \frac{2 - a^2 - 3b^2}{2ab - 1}$$

בסתירה לאי רציונליות של $\sqrt{3}$. אם $ab = \frac{1}{2}$ אז נקבל במשוואה ממקודם

$$2 = a^2 + 3b^2$$

נציב $a = \frac{1}{2b}$ ונקבל

$$3b^2 - 2 + \frac{1}{4b^2} = 0$$

$$12b^4 - 8b^2 + 1 = 0$$

נפתור משווה ריבועית ונקבל

$$b^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{24} = \frac{8 \pm 4}{24}$$

כלומר b לא יוצא מספר רציונאלי. כמו כן, ברור שה פולינום (מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$)

$$x^2 - 2 - \sqrt{3}$$

מאפס את $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ולכן זהו פולינום מינימלי. כלומר

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{3}}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = 2$$

בסך הכל נקבל ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{3}}) : \mathbb{Q}] = 4$$

(ג) חשבו $[\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{13}{4}+\sqrt{3}}) : \mathbb{Q}]$.

פתרון: כמו בתרגיל הקודם ננסה להבין האם

$$\sqrt{\frac{13}{4}+\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$$

נניח ש

$$\sqrt{\frac{13}{4}+\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$$

נעלה בריבוע ונקבל

$$\frac{13}{4} + \sqrt{3} = a^2 + 3b^2 + 2\sqrt{3}ab$$

כמו קודם, אם $ab \neq \frac{1}{2}$ נקבל סתירה. אם $b = \frac{1}{2a}$ אז נקבל משוואה

$$\frac{13}{4} = 3b^2 + \frac{1}{4b^2}$$

כלומר

$$12b^4 - 13b^2 + 1 = 0$$

כמובן ש $b = 1$ ו $a = \frac{1}{2}$פתרון. היות והמספרים פה חיוביים, אכן מתקיים

$$\sqrt{\frac{13}{4}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

(חייבים לציין שהכל חיובי כי העלנו בריבוע בהתחלה) ולכן בוודאי ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{13}{4}+\sqrt{3}}):\mathbb{Q}(\sqrt{3})]=1$$

כלומר

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{13}{4}+\sqrt{3}}):\mathbb{Q}]=2$$