

**בחינת סיום (מועד א') בקורס
מבנים אלגבריים להנדסה (83218)**

מרצה: פרופ' נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 15 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

א. תהי (G, \cdot) חבורה קומוטיבית. יהיו $x, y \in G$, ונסמן את הסדרים שלהם ב- G על ידי $m = o(y)$ ו- $n = o(x)$. נניח שהמספרים m, n זרים (כלומר, $\gcd(m, n) = 1$). הוכיחו כי $o(x \cdot y) = mn$.

ב. תהי G חבורה בת 4 איברים. הוכיחו כי G קומוטיבית.

שאלה 2

א. תהיינה G_1, G_2 חבורות. הוכיחו או הפריכו:
a. אם G_1, G_2 ציקליות אז גם $G_1 \times G_2$ ציקלית.
b. אם $G_1 \times G_2$ ציקלית אז גם G_1, G_2 ציקליות.

ב. תהי G חבורה בת 21 איברים. נתבונן בקבוצת תתי החבורות של G . נגדיר עליה יחס שקילות: $H_1 \sim H_2$ אם ורק אם H_1, H_2 איזומורפיות. הוכיחו כי בקבוצת מחלקות השקילות של היחס יש לכל היותר 4 איברים. [אין צורך להוכיח שהיחס הוא אכן יחס שקילות].

שאלה 3

א. תהי G חבורה ותהיינה G_1, G_2 תתי חבורות נורמליות שלה כך ש- $G_1 \cap G_2 = \{e\}$. הוכיחו כי לכל $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ מתקיים $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

ב. תנו דוגמא לחבורה G ותתי חבורות G_1, G_2 שלה כך ש- $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ אבל לא לכל $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ מתקיים $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

שאלה 4

א. יהיו R_1, R_2 חוגים, ויהי $f: R_1 \rightarrow R_2$ הומומורפיזם של חוגים. נסמן ב- 0 את איבר היחידה החיבורי של R_2 . הוכיחו כי $\text{Ker}(f) = \{x \in R_1 : f(x) = 0\}$ הוא אידאל של R_1 .

ב. תנו דוגמא לחוג שכל תת חוג שלו הוא אידאל, ודוגמה לחוג שלא כל תת חוג שלו הוא אידאל.

שאלה 5

א. מצאו את ההפכי (לכפל) של האיבר $z = [x + 1]$ בשדה $F = \mathbb{Z}_2[x] / \langle x^4 + x + 1 \rangle$.

ב. האם $F = \mathbb{Z}_2[x] / \langle x^5 + x^2 + 1 \rangle$ עם הפעולות חיבור וכפל מודולו הפולינום $x^5 + x^2 + 1$ הוא שדה? ?