תרגיל על סופרמום ואינפימום

תרגיל

תהי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית ויהיו $A,B\subseteq X$. נניח כי $\sup B$ קיים. הוכיחו כי:

$$\sup(A\cup\{\sup B\})=\sup(A\cup B)$$

ואגף ימין קיים אם ורק אם אגף שמאל קיים (כמובן שהסופרמום לא חייב להיות קיים...).

הוכחה

בפתרון התרגיל נשתמש בתכונה הבאה (ההוכחה קלה ונשאיר אותה כתרגיל):

- אם $\sup C$ קיים אז c חסם עליון של C אם ורק אם $\sup C\leq c$.

נגדיר את הקבוצות הבאות:

S - קבוצת כל החסמים העליונים של $A\cup B$
T - קבוצת כל החסמים העליונים של $A\cup\{\sup B\}$

טענה: $S=T$.

הוכחת הטענה: נראה ש-$s\in S\Leftrightarrow s\in T$. באמת:

$s\in S$ $\Leftrightarrow$ (הגדרת S)
לכל $x\in A\cup B$: $x\leq s$ $\Leftrightarrow$
לכל $x\in A$: $x\leq s$ וגם לכל $x\in B$: $x\leq s$ $\Leftrightarrow$
לכל $x\in A$: $x\leq s$ וגם s חסם עליון של B $\Leftrightarrow$ (כאן אנחנו משתמשים בתכונה)
לכל $x\in A$: $x\leq s$ וגם $\sup B\leq s$ $\Leftrightarrow$
לכל $x\in A\cup\{\sup B\}$: $x\leq s$ $\Leftrightarrow$ (הגדרת T)
$s\in T$

משל טענה

כעת, $\sup(A\cup B)$ קיים $\Leftrightarrow$ (הגדרה)
ב-S קיים איבר קטן ביותר $\Leftrightarrow$ $(S=T)$
ב-T קיים איבר קטן ביותר $\Leftrightarrow$ (הגדרה)
$\sup(A\cup\{\sup B\})$ קיים.

במקרה שהסופרמום קיים, $\sup(A\cup B)$ הוא האיבר הקטן ביותר ב-S, שהוא האיבר הקטן ביותר ב-T והוא שווה ל-$\sup(A\cup\{\sup B\})$. לכן, $\sup(A\cup\{\sup B\})=\sup(A\cup B)$.

מש"ל.

מסקנה

יהי $(X,\leq)$ סריג. אזי לכל תת קבוצה סופית לא ריקה של X קיים סופרמום.

הוכחה
תהי $\phi \neq A \subseteq X$ קבוצה סופית. נוכיח באינדוקציה על הגודל של A (שיסומן ב-$|A|$) ש-$\sup A$ קיים.

אם $|A| = 1$, אז המסקנה ברורה. ($\sup\{a\} = a$. בדקו!).

נניח כי הוכחנו את המסקנה כאשר $|A| = k - 1$ ($k \geq 2$), ונוכיח את המסקנה כאשר $|A| = k$:
נכתוב $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ונגדיר $B = \{a_2, \ldots, a_k\}$. אזי לפי הנחת האינדוקציה, $\sup B$ קיים.
בנוסף, היות ו-$(X, \leq)$ סריג, $\sup\{a_1, \sup B\}$ קיים (בסריג קיים סופרמום לכל קבוצה בת שני איברים). נשים לב ש-$\sup\{a_1, \sup B\} = \sup(\{a_1\} \cup \{\sup B\})$ ולכן, לפי התרגיל $\sup(\{a_1\} \cup B)$ קיים. אבל $A = \{a_1\} \cup B = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ולכן הוכחנו של-$\sup A$ קיים.

מש"ל.

הערה
באופן דומה, בסריג, לכל קבוצה סופית לא ריקה יש אינפימום.