פתרון תרגיל בית 7 פונקציות מרוכבות למתמטיקה – טורי חזקות, טורי טי'ילור

שאלה 1

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+4i)^n}{(2n+1)(5n+7)}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 4^n}\left(\frac{z+2}{z-2}\right)^n$ עבור $z\neq 2$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-z^n}{1+z^n}$ אין צורך לפתור עבור נקודות בהן $|z|=1$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(z^3-i\right)^n$

פתרון

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+4i)^n}{(2n+1)(5n+7)}$

זה טור סביב $z_0=-4i$ עם מקדמים $a_n=\frac{1}{(2n+1)(5n+7)}>0$.

נמצא את רדיוס ההתכנסות לפי נוסחת קושי-הדמר:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\left|\underbrace{\frac{1}{(2n+1)(5n+7)}}_{>0}\right|}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)(5n+7)}}}=\frac{1}{\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n+1)(5n+7)}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n+1)(5n+7)}$$

ידוע כי $a>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, לכן מאי השוויון

$$2n<2n+1\le 3n\Rightarrow \sqrt[n]{2n}=\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}<\sqrt[n]{2n+1}\le\sqrt[n]{3n}=\underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$, לפי כלל הסנדביץ נקבל $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}=1$.

באותו אופן מראים כי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n+7}=1$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n+1)(5n+7)}=1$$

מכאן מקבלים

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n+1)(5n+7)}=1$$

זה עוד לא אומר לנו בדיוק מהו תחום ההתכנסות כי צריך לבדוק את השפה.
אם z מספר מרוכב כך ש-$|z+4i|=1$ אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+4i)^n}{(2n+1)(5n+7)}$$

מתכנס כי הוא מתכנס בהחלט שהרי

$$\left|\frac{(z+4i)^n}{(2n+1)(5n+7)}\right|=\frac{1}{(2n+1)(5n+7)}\le\frac{1}{10n^2}\le\frac{1}{n^2}$$

ולכן לסיכום תחום ההתכנסות הוא $|z+4i|\le 1$.

ב. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 4^n}\left(\frac{z+2}{z-2}\right)^n$ עבור $z\ne 2$

נסמן $w=\frac{z+2}{z-2}$ ונקבל לפי w טור חזקות סביב $w_0=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 4^n}w^n$$

נחשב את רדיוס ההתכנסות באמצעות נוסחת קושי-הדמר והגבולות הידועים
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0$:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\underbrace{\left|\frac{1}{n^3 4^n}\right|}_{>0}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^3 4^n}}}=\frac{1}{\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3 4^n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3 4^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[n]{4^n}}_{=4}}_{=4}=4\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3=4\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^3=4$$

נותר לבדוק התכנסות על שפת העיגול. אם $|w|=4$ אז $\left|\frac{1}{n^3 4^n}w^n\right|=\frac{1}{n^3}$.
ולכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.
לכן תחום ההתכנסות הוא $\{w\in\mathbb{C},\ |w|\le 4\}$.
נחזור למשתנה המקורי z ונקבל תחום התכנסות

$$\left|\frac{z+2}{z-2}\right|\le 4$$

$$\left|\frac{z+2}{z-2}\right|^2\le 16$$

נכתוב $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$ ואז

$$\left|\frac{x+iy+2}{x+iy-2}\right|^2\le 16$$

$$\frac{(x+2)^2+y^2}{(x-2)^2+y^2}\le 16$$

$$x^2+4x+4+y^2\le 16x^2-64x+64+16y^2$$

$$15x^2-68x+60+15y^2\ge 0$$

$$x^2-\frac{68}{15}x+y^2\ge -4$$

$$\left(x-\frac{34}{15}\right)^2+y^2\ge\left(\frac{16}{15}\right)^2$$

וקיבלנו שמתחום ההתכנסות הוא המשלים של מעגל פתוח שרדיוסו $\frac{16}{15}$ ומרכזו בנקודה $z=\frac{34}{15}$. מהתחום הזה צריך להוציא את הנקודה $z=2$, שמחוץ לתחום ההגדרה בכלל.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-z^n}{1+z^n}$ עבור $|z|\neq 1$

נחלק לשני המקרים $|z|>1$ או $|z|<1$:

<u>מקרה (1)</u>: $|z|>1$

נעשה הערכה של האיבר הכללי של הטור באמצעות אי שוויון המשולש ואי שוויון המשולש ההפוך:

$$\left|\frac{1-z^n}{1+z^n}\right|\ge\frac{|1-|z|^n|}{1+|z|^n}\underbrace{=}_{|z|>1}\frac{|z|^n-1}{1+|z|^n}=\frac{1-\frac{1}{|z|^n}}{1+\frac{1}{|z|^n}}\underset{n\to\infty}{\to}1$$

השתמשנו באי שוויון המשולש במכנה ואי שוויון המשולש ההפוך במונה.
האיבר הכללי אינו שואף ל-0, כלומר תנאי הכרחי להתכנסות טורים אינו מתקי'ים ולכן הטור מתבדר.

<u>מקרה (2)</u>: $|z|<1$

גם כאן נעשה הערכה של האיבר הכללי של הטור באמצעות אי שוויון המשולש ואי שוויון המשולש ההפוך:

$$\left|\frac{1-z^n}{1+z^n}\right|\ge\frac{|1-|z|^n|}{1+|z|^n}\underbrace{=}_{|z|<1}\underset{n\to\infty}{\to}1$$

ושוב אין התכנסות.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(z^3-i\right)^n$

נציב $w=z^3-i$ ונקבל את הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} n!w^n$

היות ש

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

במקרה זה רדיוס ההתכנסות הוא $R=0$ כלומר יש התכנסות רק עבור $w=0$.
זה מתאים לערכי z עבורם

$$z^3=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

כלומר

$$z=e^{\frac{i\pi}{6}},e^{\frac{i5\pi}{6}},e^{\frac{i9\pi}{6}}$$

נשים לב שהפתרון האחרון הוא למעשה

$$e^{\frac{i3\pi}{2}}=-1$$

שאלה 2

מצאו את טור טיילור של הפונקציות הבאות. כתבו את תחום ההתכנסות של כל טור.

א. $z^2\cos z$ סביב $z=0$

פתרון

נתחיל מטור מקלורן (טיילור סביב 0) ידוע

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

נכפול ב- z^2 ונקבל את הטור המבוקש

$$z^2\cos z=z^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

מכיוון שהפונקצי'ה שלמה הטור מתכנס לכל z.

ב. $z^2\cos z$ סביב $z=\frac{\pi}{2}$

פתרון

נציב $w=z-\frac{\pi}{2}$ כדי שהפיתוח יהי'ה סביב 0. הפונקציה הופכת להיות

$$\left(w+\frac{\pi}{2}\right)^2 cos\left(w+\frac{\pi}{2}\right)=-\left(w+\frac{\pi}{2}\right)^2 sinw=-w^2\sin w-\pi w\sin w-\frac{\pi^2}{4}\sin w$$

היות והפיתוח של $sinw$ הוא

$$\sin w=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

נקבל שהטור המבוקש הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{w^{2n+3}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\pi\frac{w^{2n+2}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{4}\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

כלומר

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{w^{2n+1}}{(2n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\pi\frac{w^{2n+2}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{4}\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

כלומר הטור הוא

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^k$$

כאשר

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{\pi(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} & k=2n+2\\ (-1)^{n+1}\left(\dfrac{\pi^2}{4(2n+1)!}-\dfrac{1}{(2n-1)!}\right) & k=2n+1\end{cases}$$

ג. $\frac{z}{z^4+25}$ סביב $z=0$

<u>פתרון</u>

נשים לב ש

$$\frac{1}{25+z^4}=\frac{1}{25}\frac{1}{(1+\frac{z^4}{25})}=\frac{1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z^4}{25}\right)^n=\frac{1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{25^n}z^{4n}$$

ולכן הטור שלנו הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{25^{n+1}}z^{4n}$$

ד. $\frac{z}{(z+2)(z+3)}$ סביב $z=1$

פתרון

תחילה נפרק את הפונקצי'ה לשברים חלקים:

$$\frac{z}{(z+2)(z+3)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z+3}$$

$$\Rightarrow\frac{z}{(z+2)(z+3)}=\frac{A(z+3)+B(z+2)}{(z+2)(z+3)}$$

נשווה מונה מול מונה לכל z

$$z=A(z+3)+B(z+2)$$

נציב $z=-3$ ונקבל $B=3\Leftarrow-3=-B$

נציב $z=-2$ ונקבל $A=-2\Leftarrow-2=A$

לכן הפירוק הוא

$$\frac{z}{(z+2)(z+3)}=\underset{(I)}{\frac{-2}{z+2}}+\underset{(II)}{\frac{3}{z+3}}$$

נפתח כל מחובר לטור באמצעות הפיתוח לטור הנדסי

$$(*)\quad\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\ ,|z|<1$$

ולאחר מכן נחבר את הטורים.

נשים לב שאנו מפתחים סביב הנקודה $z_0=1$, לכן בשני המחוברים עלינו לקבל טור מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$$

עבור המחובר (I)

$$\frac{-2}{z+2}=\frac{-2}{3+(z-1)}=\frac{-2}{3\left(1+\frac{z-1}{3}\right)}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$$

נציב ב(*) את $\frac{z-1}{3}$ במקום z ונקבל

$$-\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{3^{n+1}}(z-1)^n$$

הטור מתכנס כאשר

$$\left|\frac{z-1}{3}\right|<1\Rightarrow|z-1|<3$$

לכן המחובר (I)

$$\frac{-2}{z+2}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{3^{n+1}}(z-1)^n\ ,\ |z-1|<3$$

עבור המחובר (II)

$$\frac{3}{z+3}=\frac{3}{4+(z-1)}=\frac{3}{4\left(1+\frac{z-1}{4}\right)}=\frac{3}{4}\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}}$$

נציב ב(*) את $\frac{z-1}{4}$ במקום z ונקבל

$$\frac{3}{4}\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}}=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{4}\right)^n=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4^n}(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{4^{n+1}}(z-1)^n$$

הטור מתכנס כאשר

$$\left|\frac{z-1}{4}\right|<1\Rightarrow|z-1|<4$$

עבור המחובר (II)

$$\frac{3}{z+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{4^{n+1}}(z-1)^n\ ,\ |z-1|<4$$

כעת נחבר את הטורים.

תחום ההתכנסות הכולל הוא חיתוך בין העיגולים $|z-1|<3$ וגם $|z-1|<4$, ז"א זה עיגול עם הרדיוס היותר קטן, $|z-1|<3$.

בסה"כ התשובה הסופית

$$\frac{z}{(z+2)(z+3)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{3^{n+1}}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{4^{n+1}}(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n$$

תחום ההתכנסות $|z-1|<3$.

שאלה 3

יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum a_n z^n$ הוא 1.

פתרון

נסמן את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum a_n z^n$ ב- R. היות ש- $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אנחנו יודעים ש $\sum a_n z^n$ מתכנס עבור $z=1$, לכן רדיוס ההתכנסות הוא לפחות 1.

מצד שני רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum |a_n| z^n$ הוא גם R והטור הזה דווקא מתבדר עבור $z=1$, כלומר $R\le 1$ ולכן לסיכום $R=1$.

שאלה 4

א. מצאו את תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)z^n$$

פתרון

לפי נוסחת קושי-הדמר טריוויאלי לראות שרדיוס ההתכנסות הוא

$$R=\frac{1}{limsup\sqrt[n]{|a_n|}}=1$$

כמו כן, עבור נקודות שבהן $|z|=1$ קל לראות שהטור מתבדר כי הסדרה של הטור לא מתכנסת ל-0.

לסיכום תחום ההתכנסות הוא

$$\{z:|z|<1\}$$

ב. עבור הערכים בהם יש התכנסות, מצאו את סכום הטור.

פתרון

נתחיל מהטור ההנדסי הידוע

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\ ,\ |z|<1$$

נגזור איבר איבר ונקבל:

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \Rightarrow -\frac{1}{(1-z)^2}\cdot(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}\ ,|z|<1$$

עלינו לקבל במקדם גם את הכופל $n+2$. לכן, נכפול את הטור שקיבלנו ב- z^3 לקבל חזקה $n+2$.

$$\frac{z^3}{(1-z)^2} = z^3\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n+2}\ ,|z|<1$$

נגזור איבר-איבר:

$$\left(\frac{z^3}{(1-z)^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)z^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)z^n = \frac{3z^2(1-z)^2 - z^3\cdot 2(1-z)\cdot(-1)}{(1-z)^4} = \frac{3z^2(1-z)+2z^3}{(1-z)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)z^n = \frac{3z^2-z^3}{(1-z)^3}\ ,|z|<1$$

ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)z^n = \frac{3z^2-z^3}{(1-z)^3}\ ,|z|<1$$

שאלה 5

פתחו לטור טיילור סביב 0 את הפונקציה

$$f(z) = \int_0^z e^{w^2}dw$$

פתרון

נתחיל מטור מקלורן (טיילור סביב 0) ידוע של הפונקצי'ה השלמה e^z

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

המתכנס לכל z.

נכתוב בטור זה w^2 במקום z ונקבל

$$e^{w^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{2n}}{n!}$$

המתכנס לכל w.

לכן לפי אינטגרצי'ה איבר איבר

$$f(z)=\int_0^z e^{w^2}dw=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{2n}}{n!}dw=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z\frac{w^{2n}}{n!}dw=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Bigg|_0^z$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

<u>שאלה 6</u>

מצאו את כל הפונקציות $f(z)$ המקי'ימות את התנאים הבאים:

(1) $f(z)$ שלמה

(2) $\left|\frac{f(z)}{z^2}\right|\le 1$ עבור ערכי z כך ש- $|z|\ge 10$

(3) $f(0)=0$, $f'(0)=0$ ו- $f''(0)=1$

<u>פתרון</u>

נתון כי $f(z)$ שלמה, לכן יש לה פיתוח טיילור בכל $\mathbb{C}$.

טור מקלורן של $f(z)$ הוא מהצורה

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

לפי הנתון (3) ידוע כי $f(0)=0$ ו- $f'(0)=0$, לכן שני המחוברים הראשונים בטור מקלורן הם 0, לכן

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

כעת נתבונן בפונקצי'ה $\frac{f(z)}{z^2}$ המופיעה בנתון (2). היא לא מוגדרת ב- $z=0$.

נחשב:

$$\frac{f(z)}{z^2}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}z^n$$

נשים לב שקיבלנו טור חזקות המבוסס על המקדמים של הטור של הפונקצי'ה השלמה $f(z)$, כאשר שני המקדמים הראשונים הם המקדמים של החזקות z^2 ו- z^3 בפיתוח של $f(z)$ וכן הלאה (הזזנו את מקדמי הטור של f בשני מקומות אחורה), לכן הטור של $\frac{f(z)}{z^2}$ גם מתכנס בכל $\mathbb{C}$.

נגדיר פונקצי'ה חדשה

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^2} & z \neq 0 \\ \frac{f^{(2)}(0)}{2} \underbrace{=}_{(3)} \frac{1}{2} & z = 0 \end{cases}$$

אז $g(z)$ תהי'ה גם כן שלמה.

נשים לב שלפי הנתון לכל z כך ש- $|z| \geq 10$ מתקי'ים ש $|g(z)| \leq 1$, כלומר $g(z)$ חסומה ב- $|z| \geq 10$. אבל היא בודאי ש- $g(z)$ חסומה גם ב- $|z| \leq 10$ (היא רציפה וזה תחום סגור וחסום). ולכן בסה"כ $g(z)$ חסומה.

לפי משפט ליוביל, $g(z)$ קבועה כלומר

$$g(z) = g(0) = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$f(z) = \frac{1}{2} z^2$$

היא הפונקצי'ה היחידה המקי'ימת את הדרישות הנ"ל.