תרגול 8

פונק' פתוחות וסגורות.

1. הגדרה: פונקציה $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ תקרא פתוחה אם תמונה של פתוחה היא פתוחה. והיא תקרא סגורה אם תמונה של סגורה היא סגורה.

   (א) הערה: רציפות, פתיחות וסגירות של פונקציה אינן שקולים.

   (ב) דוגמא: $f:(\mathbb{R},\tau_S)\to\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)$ המוגדרת $f(x)=\lfloor x\rfloor$. כן רציפה: יהא קטע (a,b) בטופולוגיה אזי

   $$f^{-1}(a,b)\in[\lceil a\rceil,\lfloor b\rfloor+1)$$

   למשל $f^{-1}(2.3,5.1)=[3,6)$. כן סגורה: כי לכל תת קבוצה A מתקיים כי $f(A)\subseteq\mathbb{Z}$ שהיא סגורה ב $\mathbb{R}$ עם האוקלידית.
   לא פתוחה: $f[1,2)=\{1\}$ שאינו פתוח.

   (ג) דוגמא: $f:\left((0,1),\tau_{|*|}\right)\to\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)$ המוגדרת $f(x)=x$ ההכלה. היא פתוחה כי $f(O)=O=O=O'\cap(0,1)$ שפתוח ב $\mathbb{R}$. לא סגורה: כי $f((0,1/2])=(0,1/2]$ שאינה סגורה.

   (ד) הערה: אם f פתוחה/סגורה אזי היא תהיה פתוחה/סגורה גם שמצמצמים את הטווח לתמונה של f. ההיפך אינו נכון.

2. הגדרה: פונקציה $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ תקרא הומיאומורפיזים אם f הפיכה ורציפה וההופכית גם רציפה.
   אם יש הומיאומורפיזם $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ אז נגיד שהמרחבים הומיאומורפיים.

   (א) למשל $f:(\mathbb{R},\mathrm{disc})\to\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)$ היא הפיכה ורציפה אבל אינה הומיאומורפיזם כי ההופכית אינה רציפה.

   (ב) תרגיל: $\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)$ הומיאומורפי לישר $\{(x,y):\ y=mx+n\}$.

   (ג) הערה: f הפיכה רציפה ופתוחה (או סגורה) אמ"מ היא הומיאומורפיזם.

   (ד) הערה: אם X הומאומורפי' ל Y עם פונקציה f אזי $X\backslash A$ הומי' ל $Y\backslash f[A]$ לכל $A\subseteq X$.

3. הערה: מרחבים הומיאומורפיים הם בגדול בעלי אותם תכונות טופולוגיות למשל: קשירות.

   (א) תרגיל: הוכיחו כי $(0,1)$ אינו הומ' ל $[0,1]$.

4. תרגיל: הוכיחו כי ב$\mathbb{R}^2$ מעדל אינו הומיאומורפי לשני מעגלים שנחתכים.

5. תרגיל: הוכיחו כי האותיות A וB כתתי מרחבים של $\mathbb{R}^2$ אינן הומיאומורפיות.

מרחבי מכפלה סופיות

1. הגדרה: יהיו (X_i, τ_i) מספר סופי של מרחבים טופולוגיים. נגדיר $X = \prod_i X_i$ ונגדיר טופולוגיה τ עליו כך: הבסיס של הטופולוגיה יהיה $\{\prod U_i : U_i \in \tau_i\}$ (כלומר: מכפלות של קבוצות פתוחות).

   (א) דוגמא: ב $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ עם טופולוגית המכפלה: הקבוצה $(0,1) \times (0,1) \cup (1,2) \times (1,2)$ פתוחה, אבל לא שייכת לבסיס שתיארנו.

   (ב) תרגיל: מכפלה סופית של מרחבים דיסקרטיים (עם טופולוגיית המכפלה, כמובן) היא מרחב דיסקרטי.

2. תרגיל: האם מכפלה של מרחבים קו-סופיים יוצרת את הטופולוגיה הקו- סופית?
פתרון: לא. למשל, אם נכפיל את המרחב $(\mathbb{N}, \tau_{cof})$ עם עצמו. נסתכל על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ עם טופולוגית המכפלה המתקבלת. $\mathbb{N} \backslash \{1\} \times \mathbb{N} \backslash \{1\}$ פתוח לפי הגדרה אבל המשלים שווה ל $(\{1\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})$ שאינו סופי.

3. תרגיל: הוכיחו כי במרחב מכפלה, מכפלה סופית של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה.

4. תרגיל: יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. $A \subseteq X, B \subseteq Y$. הוכיחו כי בטופולוגיית המכפלה על $X \times Y$ מתקיים: $cl(A \times B) = cl(A) \times cl(B)$

5. תרגיל: יהא X מ"ט נגדיר את האלכסון $\Delta = \{(x,x) : x \in X\} \subseteq X \times X$. הוכיחו כי Δ סגור אמ"מ X הוא T_2

6. תרגיל: הוכיחו כי Δ הומיאומורפי ל X.

7. תרגיל: האם מכפלה סופית של מרחבי האוסדורף היא מרחב האוסדורף??

מרחבי מכפלה אינסופיות

1. הגדרה: יהיו (X_i, τ_i) אוסף כלשהוא של מרחבים טופולוגיים. נגדיר $X = \prod_i X_i$ ונגדיר את טופולוגית המכפלה τ_π עליו כך: בסיס של הטופולוגיה יהיה $B_\pi = \{\prod U_i : U_i \in \tau_i\}$ כך שפרט למספר סופי של אינדקסים $U_i = X_i$. (במילים: במספר סופי של אינדקסים בוחרים קבוצה פתוחה, ומכפילים עם כל שאר המרחבים).

   (א) הערה: בטופולוגיה המכפלה מתקיים כי פונקציות ההטלה על רכיב מסויים: P_i $X \to X_i$ רציפות. כי $P_i^{-1}(U) = \prod_{i \neq j} X_i \times U$

2. תרגיל: יהיו (X_i, τ_i) אוסף כל שהוא של מרחבים טופולוגיים. ותהא τ' טופלוגיה על $X = \prod_i X_i$ כך שכל P_i רציפות. הוכיחו כי $\tau_\pi \subseteq \tau'$.

3. תרגיל: תהא $f : Y \to \prod X_i$ פונקציה. אזי f רציפה אמ"מ $P_i \circ f$ רציפה לכל i.

4. תרגיל: מכפלה כלשהי של קבוצות סגורות היא סגורה. כלומר, יהיו $\{X_i\}$ מרחבים טופולוגיים ו$C_i \subseteq X_i$ קבוצות סגורות. הוכיחו ש$\prod C_i \subseteq \prod X_i$ סגור בטופולוגיית המכפלה.

5. תרגיל: יהיו X_i מרחבים דיסקרטים לא ריקים. אזי $X = \prod X_i$ דיסקרטי אמ"מ $|X_i| = 1$ פרט למספר סופי של מקומות.

6. תרגיל: מכפלה כלשהיא של מרחבים T_2 היא T_2.

7. תרגיל: אם אחד מהמרחבים X_i אינו קשיר אזי המכפלה $X = \prod X_i$ אינה קשירה

8. הגדרה: על מכפלה אינסופית של מרחבים טופולוגיים ניתן להגדיר טופולוגיה נוספת שנקרא לה: $box - top$ (טופולוגיית הקופסאות) .מוגדרת ע"י הבסיס $\{\prod U_i \, : \, U_i \in \tau_i\}$. כלומר, בכל רכיב בוחרים קבוצה פתוחה).

9. תרגיל: הראו כי ביחס ל $box - top$ ייתכן כי פונקציה תהא רציפה בכל רכיב למרות שאינה רציפה.

קשירות במכפלה

1. משפט: אם X_1, X_2 קשירים אזי $X_1 \times X_2$ קשיר (ולכן מכפלה סופית של קשירים היא קשירה)

2. משפט: (משפט אלומות) יהא X מ"ט יהיו $\{A_i\}$ אוסף תמ"ט קשירים שנחתכים בזוגות אזי $\cup A_i$ קשיר.

3. תרגיל: אם $\{X_i\}$ קשירים אזי $\prod X_i$ קשיר.