

לוגיקה – פתרון תרגיל בית 16

תרגיל 1

האם הקביעות הבאות נכונות? נמקו היטב!

- דברים שחשוב להבין/לזכור:
המערכת האקסיומטית H שהכרנו בהרצאה, היא מערכת אחת מתוך אוסף של מערכות שנקרא "מערכות הילברט".
[להעשרה, אתם מוזמנים לעיין בערך
http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_system
 H היא שיטת דדוקציה השונה מהשיטה שכבר הכרנו (שיטת הדדוקציה הטבעית). במקום 19 כללי גזירה היא כוללת כלל גזירה אחד (מודוס פוננס) ושלוש אקסיומות.
כמו שיטת הדדוקציה הטבעית, גם המערכת האקסיומטית H היא **שלמה ונאותה**.
כמו כן, שימו לב שאם פסוק כלשהו יכיח מאפס הנחות במערכת נאותה מסוימת, זה אומר שהוא טאוטולוגיה (מדוע? ומדוע היינו צריכים את הנאותות?).

- 1.** נתון שפסוק מסוים יכיח במערכת האקסיומטית H מאפס הנחות. מכאן נובע שהוא יכיח מאפס הנחות גם בדדוקציה טבעית.

תשובה:

הטענה נכונה. אם פסוק כלשהו יכיח מאפס הנחות במערכת האקסיומטית H , אזי הוא טאוטולוגיה (כי זו מערכת נאותה). לכן פסוק זה יכיח גם בשיטת הדדוקציה הטבעית, שכן זו שיטה שהיא שלמה (ושלמות אומר, בין השאר, שניתן להוכיח את כל הטאוטולוגיות).

- 2.** נתון שפסוק מסוים לא יכיח מאפס הנחות בדדוקציה טבעית. ייתכן שהוא יכיח מאפס הנחות במערכת האקסיומטית H .

תשובה:

הטענה אינה נכונה. אם הפסוק היה יכיח מאפס הנחות ב- H אז הוא היה טאוטולוגיה, ולכן היה יכיח מאפס הנחות בדדוקציה הטבעית.

- 3.** אם טיעון מסוים מוצרן בשפת תחשיב הפסוקים והוא תקף, הוא יישאר תקף גם אם נצרין אותו כראוי בשפת תחשיב הפרדיקטים.

תשובה:

הטענה נכונה, שכן תחשיב הפרדיקטים מעדן את תחשיב הפסוקים, ולכן כל הטיעונים התקפים של תחשיב הפסוקים ישארו תקפים בתחשיב הפרדיקטים.

אכן, אם נצריך את הטיעון התקף בתחשיב הפרדיקטים, אזי התבנית של/הצורה שלו תשאר זהה, והצורה היא זו שקובעת את התקפות.

4. אם טיעון מסויים מוצרן בשפת תחשיב הפרדיקטים והוא תקף, הוא ישאר תקף גם אם נצריך אותו בשפת תחשיב הפסוקים.

תשובה:

לא נכון. דוגמה נגדית:
כל היוונים הם בני תמותה
סוקרט הוא יווני
לכן סוקרטס הוא בן תמותה.

זהו טיעון תקף בתחשיב הפרדיקטים (כרגע תשתכנעו אינטואיטיבית, ועוד כמה שיעורים נוכל להוכיח אותו), עם זאת הוא אינו תקף בתחשיב הפסוקים (אתם מוזמנים לנסות ולראות בעצמכם).

תרגיל 2

מילון:

x - מכיר/ה את y Mxy

z - חברה של x Fzx

y - שכן של w Nyw

e - אתי

d - דורית

b - בוריס

c - כרמית

א. תרגמו לשפה הטבעית את הפסוקים הבאים:

1. $Med \wedge Mec$

2. $Meb \wedge Fbe$

3. $Ndc \rightarrow Mdc$

4. $\neg Nce$

5. $\forall x Mxex$

$$6. \exists x(Mxc \wedge \neg Nxd)$$

$$7. \forall z(Fzc \rightarrow Nzc)$$

$$8. \exists y(Mdy \vee Myd)$$

$$9. \forall z(Mbz \leftrightarrow Fbz)$$

$$10. \exists xMbx \leftrightarrow \exists xFbx$$

תשובה:

1. אתי מכירה את דורית וגם אתי מכירה את כרמית
2. אתי מכירה את בוריס וגם בוריס חבר של אתי
3. אם דורית שכנה של כרמית אז דורית מכירה את כרמית
4. כרמית לא שכנה של אתי
5. אתי מכירה את כולם (לכל אדם x , אתי מכירה את x)
6. קיים מישהו שמכיר את כרמית ואינו שכן של דורית (שימו לב שמדובר באותו המישהו!)
7. אם מישהו חבר של כרמית, אז הוא שכן שלה (והכוונה היא שזה נכון לכל אחד. כלומר, לכל אדם בעולם: אם הוא חבר של כרמית אז הוא שכן של כרמית); או: כל מי שהוא חבר של כרמית, הוא שכן שלה
- טעות נפוצה בה נתקלתי בעת הבדיקה: הרבה מכם תרגמו את המשפט באופן הבא: "אם כולם חברים של כרמית אז כולם שכנים של כרמית". אבל למעשה מה שאתם תרגמת הוא הפסוק $\forall zFzc \rightarrow \forall zNzc$. שימו לב להבדלים במשמעות בין שני הפסוקים!
8. קיים מישהו שדורית מכירה אותו או שהוא מכיר את דורית
9. בוריס מכיר מישהו אם ורק אם הוא (בוריס) חבר של אותו המישהו (בשפה פשוטה: בוריס מכיר את החברים שלו, ורק אותם)
10. יש מישהו שאותו בוריס מכיר אם ורק אם יש מישהו שבוריס חבר שלו.

ב. הצרינו את הפסוקים הבאים:

1. אתי מכירה את דורית אבל לא מכירה את בוריס.
 $Med \wedge \neg Meb$
2. יש מישהו שהוא חבר של בוריס.
 $\exists xFxb$
3. כרמית היא חברה של בוריס אם ורק אם יש מישהו שהוא חבר של כרמית.
 $Fcb \leftrightarrow \exists xFxc$