פתרון תרגיל בית 2 - טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה p-adic באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני מגדירים מטריקה על $\mathbb{Z}$-

$d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$, עבור $k(x,y) = \max\{i : p^i \mid (x-y)\}$.

א. הוכיחו ש $p^n \xrightarrow{d_p} 0$.

ב. תארו את הכדור $B_{d_7}\left(3, \frac{1}{49}\right)$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_7)$.

ג. עבור $t \in \mathbb{Z}$ מצאו דוגמא לסדרה לא קבועה במרחב $(\mathbb{Z}, d_3)$ המתכנסת ל- t.

<u>פתרון</u>

א. $k(p^n,0) = \max\{i : \ p^i \mid (p^n - 0)\} = n \Rightarrow d_p(p^n,0) = \frac{1}{p^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow p^n \overset{d_p}{\to} 0$

ב. $B_{d_7}\left(3, \frac{1}{49}\right) = \left\{x \in \mathbb{Z} : d_7(x,3) < \frac{1}{7^2}\right\}$ ולכן $\frac{1}{7^{k(x,3)}} < \frac{1}{7^2}$ ולכן $k(x,3) \geq 3$

ומכאן $7^3 \big| (x-3)$ ולכן הכדור הוא $3 + 7^3\mathbb{Z}$.

ג. למשל: $x_n = 3^n + t$ שכן מתקיים $d_3(x_n, t) = \frac{1}{3^n} \to 0$.

<u>שאלה 2</u>

יהיו $x_1, x_2 \in (X,d)$ ו- $r_1, r_2 > 0$ ויהיו $B(x_1,r_1), B(x_2,r_2)$ כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק. תהי $p \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$, ו- $r = \min\{r_1 - d(p,x_1), r_2 - d(p,x_2)\}$

הוכיחו ש- $B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$.

<u>פתרון</u>

<u>טענת עזר</u>:

תהי $p \in B(x,R)$ ונניח שמתקיים $0 < r \leq R - d(x,p)$, אזי $B(p,r) \subseteq B(x,R)$.

<u>הוכחת טענת עזר</u>:

יהי $z \in B(p,r)$ אזי $d(p,z) < r$. $d(z,x) \leq d(z,p) + d(p,x) < r + d(p,x) \leq R$ ולכן $z \in B(x,R)$.

הערה: אכן מתקיים $0 < R - d(x,p)$ שכן $p \in B(x,R)$.

מש"ל טענת עזר.

כעת, יהי $r = \min\{r_2 - d(p,x_2), r_1 - d(p,x_1)\}$. מהעובדה ש-$p \in B(x_1,r_1)$ ומטענת העזר נובע ש-$B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1)$ (הציבו $x = x_1,\ R = r_1$). באופן דומה נקבל $B(p,r) \subseteq B(x_2,r_2)$.

<u>שאלה 3</u>

יהי (X,d) מרחב אולטרה-מטרי. הוכיחו:

א. לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $x, y \in X$ $B(x,\varepsilon) = B(y,\varepsilon)$ או $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \varnothing$.
הסיקו שלכל $\varepsilon > 0$, $\{B(x,\varepsilon)\}_{x \in X}$ (ε-כיסוי) חלוקה של X.

ב. $\{x_n\} \subseteq X$ סדרת קושי אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

ג. מצאו דוגמאות נגדיות לסעיפים א וב כאשר (X,d) מרחב מטרי שאינו אולטרה-מטרי.

<u>פתרון</u>

א. יהי $\varepsilon > 0$ ו $x, y \in X$. נניח ש $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) \neq \varnothing$ ונראה ש $B(x,\varepsilon) = B(y,\varepsilon)$.
$B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) \neq \varnothing$ ולכן קיים $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$. מכיון ש $z \in B(x,\varepsilon)$ נקבל ש

$$\begin{gathered} t \in B(x,\varepsilon) \Leftrightarrow d(t,x) < \varepsilon \Leftrightarrow d(t,x) < \varepsilon \wedge d(x,z) < \varepsilon \Leftrightarrow \\ d(t,z) = \max\{d(t,x), d(x,z)\} < \varepsilon \Leftrightarrow t \in B(z,\varepsilon) \end{gathered}$$

ומכאן $B(x,\varepsilon) = B(z,\varepsilon)$.

באופן דומה ניתן להסיק מהתנאי $z \in B(y,\varepsilon)$ ש $B(y,\varepsilon) = B(z,\varepsilon)$. לכן

$B(x,\varepsilon)=B(z,\varepsilon)=B(y,\varepsilon)$ כדרוש. ברור ש $\bigcup_{x\in X} B(x,\varepsilon)=X$ (למה?) ומכיון ש לכל $x,y\in X$ $B(x,\varepsilon)=B(y,\varepsilon)$ או $B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon)=\varnothing$ נקבל עפ"י הגדרת חלוקה ש $\{B(x,\varepsilon)\}_{x\in X}$ (ε-כיסוי) חלוקה של X.

ב. $(\Leftarrow)$ נניח ש $\{x_n\}$ סדרת קושי אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,n\geq n_0$ $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. בפרט, אם נציב $m=n+1>n\geq n_0$ נקבל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $d(x_n,x_{n+1})<\varepsilon$ וזה בדיוק אומר ש $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1})=0$. שימו לב שכיוון זה נכון גם במרחב מטרי שאינו אולטרה-מטרי.

$(\Rightarrow)$ נניח ש $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1})=0$. יהי $\varepsilon>0$ אזי קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $d(x_n,x_{n+1})<\varepsilon$. נראה שאם $m>n\geq n_0$ אז $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ ומכאן שמדובר בסדרת קושי. $m>n$ ולכן קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש $m=n+k$. ניתן להוכיח באינדוקציה (על k) , תוך שימוש בעובדה שמדובר במרחב אולטרה-מטרי

ש $d(x_n,x_m)=d(x_n,x_{n+k})\leq\max\{d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n+1},x_{n+2}),\ldots d(x_{n+k-1},x_{n+k})\}<\varepsilon$.

ג. נתבונן ב $\mathbb{R}$ עם המטריקה הסטנדרטית $B(5,1)=(4,6)\neq(3,5)=B(4,1)$ וכמובן שחיתוך הכדורים אינו טריויאלי. הסדרה שאיברה הכללי הוא $S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}$ (הסס"ח של הטור ההרמוני) אינה קושי (ראיתם באינפי 1) אבל מתקיים $\lim_{n\to\infty} d(S_n,S_{n+1})=0$.

<u>שאלה 4</u>

במרחב ℓ_∞ הראו שהסדרה $x_n=\left(\frac{n+1}{n},\frac{n+2}{2n},\frac{n+3}{3n},\ldots\right)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

פתרון

הגבול הוא $x=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\right)$. הוכחה: מתקיים $d\left(x_n,x\right)=\frac{1}{n}\to 0$ (מדוע?).

שאלה 5

א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: יהי $\left(X,\sigma\right)$ מרחב מטרי, ויהי $\left(Y,\sigma_Y\right)$ תת מרחב מטרי שלו. תהי $\left\{x_n\right\}\subseteq Y$ ו- $y\in Y$. אזי $x_n \xrightarrow{\sigma_Y} y$ אמ"מ $x_n \xrightarrow{\sigma} y$.

נתבונן במרחב $\langle \mathbb{I},d\rangle$ כאשר $\mathbb{I}$ הוא קבוצת המספרים האי-רציונאליים, ו- d היא המטריקה הסטנדרטית המושרית מ- $\mathbb{R}$. נגדיר את הסדרה הבאה:
$$x_n=\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}.$$

ב. הוכיחו שהסדרה $\left\{x_n\right\}\subseteq\mathbb{I}$.

ג. הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת בתת המרחב המטרי $\left\langle \mathbb{I},d\right\rangle$.

פתרון

א. שימו לב שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sigma\left(x_n,y\right)=\sigma_Y\left(x_n,y\right)$ ולכן $x_n \xrightarrow{\sigma_Y} y$ אמ"מ $\sigma_Y\left(x_n,y\right)\to 0$ אמ"מ $\sigma\left(x_n,y\right)\to 0$ אמ"מ $x_n \xrightarrow{\sigma} y$.

ב. נניח בשלילה שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- x_n רציונאלי. אזי קיימים p,q שלמים כך ש- $\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}=\frac{p}{q}$. לאחר כפל בהצלבה מקבלים $qn+q\sqrt{2}=pn-p\sqrt{2}$ ולכן $\sqrt{2}=\frac{pn-qn}{q+p}$, בסתירה לכך ש- $\sqrt{2}$ הוא אי-רציונאלי.

ג. נניח בשלילה שהסדרה מתכנסת בתת המרחב, כלומר $x_n \to a \in \mathbb{I}$. לכן (לפי סעיף א') היא מתכנסת ב- $\mathbb{R}$. קל לראות ש- $x_n \to 1$. מיחידות הגבול במרחב מטרי נקבל $a=1$ וזו סתירה.

שאלה 6

הוכיחו או הפריכו שקיים שיכון איזומטרי במקרים הבאים:

א) $\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}:\ n\in\mathbb{N}\}\to\mathbb{Q}\cap(2004,\infty)$.

ב) $(\mathbb{Z},d_5)\to(\mathbb{Z},d_7)$.

ג) הוכיחו ששני כדורים במרחב נורמי איזומטריים אם ורק אם יש להם אותו רדיוס.

פתרון

א) קיים שיכון איזומטרי. למשל, הפונקציה

$$f:\left\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}:\ n\in\mathbb{N}\right\}\to\mathbb{Q}\cap(2004,\infty)$$

המוגדרת ע"י $f\left(x=\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}\right)=2005-\sqrt{3}+x=2005-\frac{n}{2n+5}$ היא שיכון איזומטרי כי:

$$\left|\left(\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}\right)-\left(\sqrt{3}-\frac{m}{2m+5}\right)\right|=\left|\left(2005-\frac{n}{2n+5}\right)-\left(2005-\frac{m}{2m+5}\right)\right|=\left|\frac{m}{2m+5}-\frac{n}{2n+5}\right|$$

ב) לא קיים שיכון איזומטרי $(\mathbb{Z},d_5)\to(\mathbb{Z},d_7)$ כי למשל $d_5(7,2)=\frac{1}{5}$ אבל לא קיימות נקודות ב $(\mathbb{Z},d_7)$ שהמרחק ביניהן $\frac{1}{5}$.

ג) קל לראות שפונקצית ההזזה: $f(x)=x-a+b$ $f:B(a,r)\to B(b,r)$ היא איזומטריה. מצד שני עבור $r_1\neq r_2$ ו $a,b\in X$ נקבל $diam(B(a,r_1))=2r_1\neq 2r_2=diam(B(b,r_2))$ (שימו לב השוויון $diam(B(x,r))=2r$ נכון במרחב נורמי אך לא נכון בהכרח בכל מרחב מטרי). מכיון שאין שוויון בין

הדיאמטרים של הכדורים לא קיימת איזומטריה ביניהם עפ"י מה שהוכחנו בתרגול.

<u>שאלת אתגר</u> (לא להגשה)

הראו שאם $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי ו- d המטריקה המושרה מהנורמה אזי **לא** קיימים כדורים **שונים** $B(a_1,r_1),B(a_2,r_2)$ כאשר $r_1<r_2$ ו $B(a_1,r_1)\supset B(a_2,r_2)$.

<u>פתרון</u>

נניח $a_2\neq a_1$ וכן $r_1<r_2$ ונניח בשלילה ש $B(a_2,r_2)\subseteq B(a_1,r_1)$ אזי

$a_2\in B(a_2,r_2)\subseteq B(a_1,r_1)$ ולכן $\|a_2-a_1\|<r_1$. יהי $v=a_1+r_1\cdot\frac{a_2-a_1}{\|a_2-a_1\|}$ (שימו לב

אם היינו ב $\mathbb{R}^2$ המשמעות הגיאומטרית היתה חיבור של הוקטור a_1 לוקטור עם נורמה r_1 בכיוון של a_2-a_1) מתקיים:

$$\|v-a_2\|=\left\|a_1+r_1\cdot\frac{a_2-a_1}{\|a_2-a_1\|}-a_2\right\|=\left\|(a_2-a_1)\cdot\left(\frac{r_1}{\|a_2-a_1\|}-1\right)\right\|$$

$$=\left\|(a_2-a_1)\frac{r_1-\|a_2-a_1\|}{\|a_2-a_1\|}\right\|=$$

$$\frac{\|a_2-a_1\|}{\|a_2-a_1\|}\left|r_1-\|a_2-a_1\|\right|=r_1-\|a_2-a_1\|<r_1<r_2$$

לכן $v\in B(a_2,r_2)$ אבל $v\notin B(a_1,r_1)$ שכן: $\|v-a_1\|=r_1$.

הערה : $a_2\neq a_1$ ולכן בהכרח $\|a_2-a_1\|\neq 0$ ומכאן שהביטוי $\frac{a_2-a_1}{\|a_2-a_1\|}$ מוגדר.

קיבלנו סתירה להנחה.