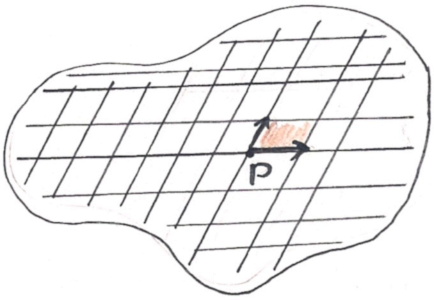
אינטגרציה על תבניות דיפרנציאליות



כיצד מוגדר אינטגרל על תחום k-מימדי?

מרשתים את התחום ע"י מקבילונים k-מימדיים

(כל מקבילון מוגדר ע"י k וקטורים ומהווה קירוב לינארי מקומי)

מחלקים משקל מספרי לכל מקבילון וסוכמים את המספרים

של כל המקבילונים המרכיבים את התחום.

הגבול של התוצאה הזו, כאשר מקטינים את הרישות

באופן אינפיניטסימלי הוא האינטגרל.

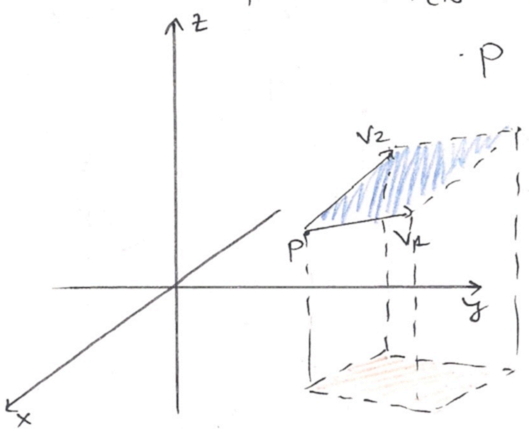
"חלוקת משקל" למקבילון הנתון ע"י k-וקטורים מוגדרת ע"י k-תבניות דיפרנציאליות

תזכורת: k-תבנית ω פועלת באופן לינארי על k-וקטורים

$$\omega_p(v_1,\dots v_k) = \text{מספר}$$

כך שחלוקת המשקל משתנה באופן רציף בין נקודות p בתחום.

דוגמא: ה-2 תבנית $\omega = xy\,dy\wedge dz - x^2\,dx\wedge dz$ מגדירה חוקיות שונה של חלוקת משקל לזוג וקטורים בהתאם לנקודה p.



למשל - ב- $p=(1,2,3)$ נקבל

$$\omega_p = 2\,dy\wedge dz - dx\wedge dz$$

כיצד ω_p פועלת על זוג וקטורים?

למשל $v_1=(4,0,-1)$ $v_2=(2,1,3)$

$$(2\,dy\wedge dz - dx\wedge dz)(v_1,v_2) = 2\,dy\wedge dz\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} - dx\wedge dz\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 2-14=12$$

* באופן גיאומטרי: התבניות $dx\wedge dy$, $dy\wedge dz$, $dx\wedge dz$ מחשבות את השטח המכוון של

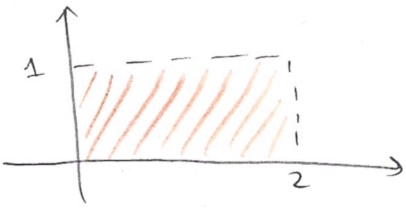
היטל המקבילית v_1v_2 לכל אחד מהמישורים [xy] [yz] [xz]

איך מחשבים אינטגרל על תבנית דיפרנציאלית?

אם $\omega = g(t_1,..t_k)dt_1\wedge..\wedge dt_k$ היא k-תבנית ב-$\mathbb{R}^k$ ו-D תחום ב-$\mathbb{R}^k$

$$\int_D \omega = \int_D g(t_1,..t_k)dt_1\wedge..\wedge dt_k = \begin{cases} +\int_D g\,dt_1 dt_2 .. dt_k & D \text{ באוריינטציה שקולה ל-} (t_1,..t_k) \\ -\int_D g\,dt_1 dt_2 ... dt_k & \text{" הפוכה - " "} \end{cases}$$

<u>דוגמא</u>: חשבו את $\int_D \omega$ כאשר $\omega = x^2 dy\wedge dx$ ו-D הוא המלבן $\left\{\begin{matrix} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 1\end{matrix}\right\}$ הנתון באוריינטציה סטנדרטית.



פתרון:

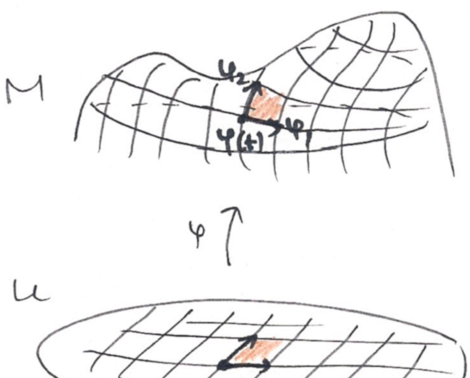
$$\int_D \omega = \int_D x^2 dy\wedge dx = -\int_D x^2 dy\, dx$$

כי D באוריינטציה הפוכה מ- $dy\wedge dx$

$$= -\int_0^2\int_0^1 x^2 dy\, dx = -\int_0^2 x^2 dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \boxed{-\frac{8}{3}}$$

*ברגע שחוזרים ל $dx\, dy$ (כלומר wedge) אפשר להחליף סדר של אינטגרלים ללא שינוי סימן.

חישוב אינטגרל על יריעה k-מימדית $M\subset\mathbb{R}^n$



תהא $M\subset\mathbb{R}^n$ k-מימדי. כלומר קיימת מפה $\varphi: U\longrightarrow M$, $(t_1,..t_k)\longrightarrow$ כאשר $U\subset\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה

נתונה k-תבנית ω ב-$\mathbb{R}^n$ ונרצה לחשב $\int_M \omega$.

רישות של U מגדיר רישות של M ע"י קואורדינטות $(t_1...t_k)$

נרצה לחשב את האינטגרל ע"י הורדת הסכימה לתחום U.

בתחום U חלוקת המשקל מושרות מנו ב-M. כלומר: התבנית ω מגדירה k-תבנית ב-U המסומנת $\varphi^*\omega$ ונקראת pull back. וכך:

$$\int_M \omega = \int_U \varphi^*\omega = \int_U \omega_{\varphi(t)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1},...\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}\right)dt_1\wedge..\wedge dt_k$$

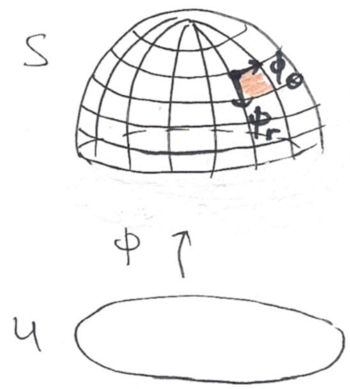
הסימן נקבע בהתאם להתאמות בין φ והאוריינטציה של היריעה M.

$$= \left\{ \pm\int_U \omega_{\varphi(t)}(\varphi_1,..\varphi_k)\,dt_1 dt_2 ... dt_k \right.$$

דוגמא: משטח S נתון ע"י הפרמטריזציה $\phi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1-r^2})$

$0\le\theta\le 2\pi \qquad 0\le r\le 1$.

חשב את $\int_S \omega$ כאשר $\omega = z^2 dx\wedge dy$ וב-S אוריינטציה מושרית מ-ϕ.



פתרון: (אפשר לשים לב ש-ϕ היא פרמטריזציה של המיספירה)

ע"פ ההגדרה ידוע ש $\int_S \omega = \int_U \phi^*\omega$

כאשר $U=\left\{(r,\theta) \;\middle|\; \begin{matrix} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{matrix}\right\}$

משמע נחשב את $\phi^*\omega$ אנו צריכים את

$$\phi(r,\theta)=(\underbrace{r\cos\theta}_{x}, \underbrace{r\sin\theta}_{y}, \underbrace{\sqrt{1-r^2}}_{z})$$

$$\phi_r=\left(\cos\theta, \sin\theta, -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\right) \qquad \phi_\theta=(-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\phi^*\omega = (\sqrt{1-r^2})^2\, dx\wedge dy \begin{pmatrix} -\phi_r- \\ -\phi_\theta- \end{pmatrix} dr\wedge d\theta = (1-r^2)\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\wedge d\theta$$

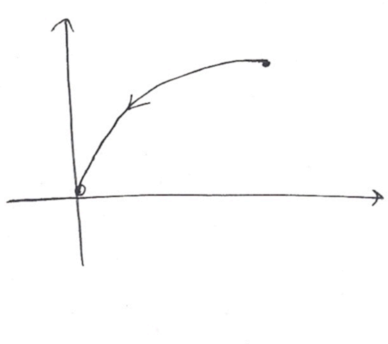
נקבע ע"פ הסדר בפרמטריזציה ϕ.

$$\phi^*\omega = (r-r^3)\,dr\wedge d\theta$$

ולכן:
$$\int_S\omega = \int_U (r-r^3)\,dr\wedge d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^3)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 d\theta = \frac{\pi}{2}$$

דוגמא: נתונה עקומה C המוגדרת כחלק הגרף $x=y^2$ בתחום $0\le x\le 1$ עם אוריינטציה המוגדרת ע"י תנועה אל ראשית הצירים.

חשב את $\int_C \omega$ עבור $\omega = xy\,dx - y^4\,dy$



פתרון: פרמטריזציה של העקומה C: $\gamma(t)=(t^2,t)$

* זו פרמטריזציה שלא תואמת את האוריינטציה!

נחשב את $\gamma^*\omega$:

$\gamma(t)=(t^2,t)$

$\gamma'(t)=(2t,1)$

$$\int_C\omega = \int_{\underset{(0,1)}{\Omega}} \gamma^*\omega = \int_\Omega \left[t^2\cdot t\; dx\big((2t,1)\big) - t^4\, dy\big((2t,1)\big)\right]dt$$

$$= \int_\Omega (2t^4-t^4)\,dt = \int_\Omega t^4\,dt = -\int_0^1 t^4\,dt = -\frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = -\frac{1}{5}$$