

פתרון מבחן מועד א' בקורס 83-118 תש"ף מתמטיקה בדידה 2 (הנדסה)

מרצה: תומר באואר
מתרגל: אריאל ויצמן

הוראות יש לפתור את כל ארבע השאלות. לכל השאלות ניקוד זהה.

1. **משך המבחן** הוא שעתיים וחצי.
2. **חומר העזר** הוא פתוח, אך מודפס בלבד או שכתבתם בעצמכם. כלומר אין להשתמש בטלפון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר. הציגו למשגיחים את כל חומר העזר שלכם לפני תחילת המבחן.
3. **שימוש במחשבון** מדעי רגיל מותר. שוב, אסור שימוש בטלפון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר לחישובים.
4. כתבו את הפתרון לכל שאלה **בדף נפרד** ונמקו אותו היטב.
5. אפשר **לכתוב "לא יודעים"** בתור הפתרון לשאלה שלמה ולקבל 5 נקודות עבורו. אפשרות זו תתקבל רק לפתרון שהוא ריק לחלוטין לשאלה שלמה (לא סעיף) פרט למילים "לא יודעים" וללא שום פתרון חלקי לידו.
6. כתבו בעט כחול או שחור באופן ברור.

עצות בכתיבה הנה כמה נקודות שכדאי לדעת כאשר אתם עונים על המבחן:

1. לחומר העזר ניתן להסתפק בדף הנוסחאות למבחן, ואפילו לא צריך מחשבון.
2. בכתיבת פתרון אתם צריכים להעביר את הידע שלכם מן הראש אל הדף. זה לא מספיק לדעת או להבין מה צריך להיות הפתרון לשאלות, אלא גם לתקשר את הידע וההבנה האלו.
3. חלקו את זמנכם בתבונה. נסו לעבור על כל השאלות ולכתוב טיוטה מהירה לרעיון הראשוני של דרך הפתרון, ואז כתבו פתרון מלא לשאלות שאתם יודעים לענות עליהן.
4. אנחנו לא קוראי מחשבות, ולכן אתם צריכים לכתוב את מה שאתם רוצים שנדע, ורק את מה שרלוונטי לפתרון. כתבו בכתב מסודר, עם משפטים מלאים ועם נימוקים והסברים לכל מה שדרוש נימוק או הסבר. כאשר משתמשים בביטויים כמו "קל לראות...", "ברור ש...", "מסיקים מייד כי...", אז צריך להוכיח את הדברים האלו. זה הרי צריך להיות קל, ברור ומייד.
5. לשאלה מסויימת יכולים להיות כמה פתרונות נכונים שונים. מצד שני, יכולים להיות לה גם הרבה פתרונות שגויים שונים. לפעמים אחד מהפתרונות הנכונים הוא יותר פשוט, או יותר קצר, או דומה למה שראינו בכיתה מאשר שאר הפתרונות. זה בסדר גמור לענות עם פתרון אחר, ובכל מקרה צריך להראות שהוא נכון ולא שגוי.

שאלות

הערה. בפתרון מלא יש לנמק ולפרט את הפתרונות. כאן מוצגות התשובות הסופיות בלבד, עם מעט רמזים. שימו לב שכל התשובות הן מספריות או נוסחאות סגורות ללא שימוש בסימן \sum .

שאלה 1. מצאו כמה סדרות $\underline{b} = (b_1, \dots, b_{2020})$ מקיימות את כל שלושת התנאים יחד:

• $b_i \in \{-2, 2\}$ לכל i .

• הסכום של הסדרה הוא $\sum_{i=1}^{2020} b_i = 12$.

• $\sum_{i=1}^k b_i > 0$ לכל $1 \leq k \leq 2020$.

רמז: כצעד ראשון, נסו לוותר על התנאי האחרון, אם זה נראה מסובך מדי. פתרון. הילוכי סריג או באופן דומה לספירת אובייקטים המקיימים את מספרי קטלן מקבלים את אחת מהדרכים להציג את המספר

$$\begin{aligned} \binom{2020}{1007} - 2 \binom{2019}{1006} &= \binom{2020}{1007} - \frac{2 \cdot 1007}{2020} \binom{2020}{1007} = \frac{3}{1010} \binom{2020}{1007} \\ &= \binom{2019}{1007} - \binom{2019}{1006} = \binom{2018}{1007} - \binom{2018}{1005} = \dots \end{aligned}$$

שאלה 2. מצאו כמה פתרונות בשלמים יש לאי השיויון

$$x_1 + \dots + x_9 \leq 100$$

1. (5 נק') כאשר $x_i \geq 1$ לכל i .

2. (20 נק') כאשר $1 \leq x_i \leq 30$ לכל i .

פתרון. יש לא מעט דרכים שונות להגיע לפתרון בשאלה זו.

1. מראים שיש התאמה חח"ע ועל לפתרונות של המשוואה $x_1 + \dots + x_9 + z = 100$ כאשר $z \geq 0$, או עם פונקציות יוצרות וסדרת סכומים חלקיים, או סכום מקדמים בינומיים. מקבלים שמספר הפתרונות הוא

$$\binom{9+91}{91} = \binom{100}{9}$$

2. עקרון ההכלה וההדחה, או ישירות עם פונקציות יוצרות. מקבלים שמספר הפתרונות הוא

$$\binom{100}{9} - 9 \binom{70}{9} + 36 \binom{40}{9} - 84 \binom{10}{9}$$

שאלה 3. נתונה סדרה $a = (a_0, a_1, \dots)$ המקיימת לכל $n \geq 2$ את נוסחת הנסיגה

$$a_n = 11a_{n-1} - 18a_{n-2}$$

כאשר $a_0 = 3$ וכן $\frac{a_{1000}}{a_{999}} = 2$. מצאו נוסחה סגורה עבור a_n .
 טבלת עזר בחשבון: מתקיים $-2 - 9 = -11$ וגם $18 = (-2) \cdot (-9)$.
 פתרון. $a_n = 3 \cdot 2^n$ לכל $n \geq 0$, למשל בעזרת נחל"ה עמ"ק.
 זה רעיון טוב לבדוק שהנוסחה הזו מקיימת את הנתון בשאלה.

שאלה 4. יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר 3-רגולרי ומישורי. נניח שיש לו ייצוג מישורי שבו כל צלע חלה בשתי פאות בדיוק, וכל פאה (כולל הפאה האינסופית) חלה ב-5, 6 או 7 צלעות. מצאו כמה פאות חלות בדיוק ב-5 צלעות אם ידוע שיש לו רק פאה אחת שחלה ב-7 צלעות. הערה: התנאי שכל צלע חלה בשתי פאות לא היה בטופס המקורי והופך את השאלה ליותר קשה.

פתרון. יש 13 פאות שחלות ב-5 צלעות. צריך את כל הנתונים, את משפט לחיצות הידיים, את נוסחת אוילר לגרף מישורי, ומפני שכל צלע חלה בשתי פאות

$$2|E| = \sum_{f \in F} t_f = 5F_5 + 6F_6 + 7F_7$$

כאשר F_i הן הפאות שחלות ב- i צלעות ו- t_f הוא מספר הצלעות שחלות בפאה $f \in F$.
 בדיעבד, היה עדיף לשאול על פאה אחת שחלה ב-4 צלעות במקום ב-7 צלעות, והשאר חלות ב-5 או 6 פאות. אז התנאי שכל צלע חלה בשתי פאות היה מתקיים בכל מקרה ומקבלים בחישוב דומה כי $F_5 = 10$.