

בוחן א' בקורס תורת החבורות 88-218 סמסטר א' תשפ"ג

מרצים: פרופ' עוזי וישנה ופרופ' מיכאל מגרל

מתרגלים: תומר באואר וגיא בלשר

הוראות:

- יש לענות על כל שלוש השאלות פתרון מלא ומנומק.
- כתבו את תשובותיכם על גבי טופס הבחינה. ניתן להשתמש בשני צידי הדף. מחברת הטייטה לא תיבדק.
- משך הבוחן: 90 דקות.
- סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

בהצלחה!

Lecturers: Prof. Uzi Vishne and Prof. Michael Megrel

Teaching assistants: Tomer Bauer and Guy Blachar

Instructions:

- Provide a full and detailed solution to all three questions.
- Write your answer on the exam form. You may use both sides of the paper. The draft notebook will not be checked.
- Total time: 90 minutes.
- The total score exceeds 100, but the maximal grade in the quiz is 100.
- Other resources: You may use a simple calculator.
- You may answer in English or Hebrew, as you wish.

Good Luck!

- שאלה 1.** תהי G חבורה, ותהיינה $H, K \leq G$ תת-חבורות כך ש- $|H| = 88$ ו- $|K| = 218$.
א. (15 נק') מצאו את כל האפשרויות עבור הסדר $|H \cap K|$. נמקו את תשובתכם.
ב. (15 נק') תנו דוגמה לחבורה G ותת-חבורות H, K כנ"ל כך ש- $H \cap K = \{e\}$.

Question 1. Let G be a group, and let $H, K \leq G$ be subgroups of G such that $|H| = 88$ and $|K| = 218$.

- (15 pts) Find all possibilities for the order $|H \cap K|$. Justify your claims.
- (15 pts) Give an example for a group G and subgroups $H, K \leq G$ as above such that $H \cap K = \{e\}$.

דף נוסף לשאלה מספר 1

שאלה 2. (35 נק') יהי p מספר ראשוני אי-זוגי. מצאו את ה- n המינימלי שעבורו קיים שיכון (מונומורפיזם) $f: \mathbb{Z}_{2p^2} \rightarrow S_n$, והוכיחו את קביעתכם.
(שימו לב: עליכם להראות שקיים שיכון עבור ה- n שמצאתם, וגם את המינימליות של n .)

Question .2 (35 pts) Let p be an odd prime number. Find the minimal value of n for which there is an embedding (monomorphism) $f: \mathbb{Z}_{2p^2} \rightarrow S_n$, and prove your claim.

(Note: You need to show there exists an embedding for the value of n you found, and the minimality of n .)

דף נוסף לשאלה מספר 2

שאלה 3. תזכורת: החבורה D_n נוצרת על ידי σ, τ כך ש- $\sigma^n = \tau^2 = (\tau\sigma)^2 = \text{id}$.
 תהי $G = D_{14}$. נתבונן בתת-החבורות

$$H = \langle \tau\sigma^2\tau, \sigma^6 \rangle$$

$$K = \langle \tau\sigma^2\tau\sigma^3\tau \rangle$$

ידוע שבדיק אחדת מבין H, K נורמלית ב- G .

א. (5 נק') הוכיחו מהיחסים הנתונים כי $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$.

ב. (15 נק') מצאו מיהי תת-החבורה הנורמלית מבין השתיים, והוכיחו את קביעתכם.

ג. (20 נק') נסמן ב- N את תת-החבורה הנורמלית שבחרתם בסעיף הקודם. ידוע כי G/N איזומורפית לאחת מבין החבורות $\{e\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4$. מצאו לאיזו חבורה מתוך הרשימה איזומורפית חבורת המנה G/N , והוכיחו שהן איזומורפיות.

Question 3. Reminder: The group D_n is generated by σ, τ such that $\sigma^n = \tau^2 = (\tau\sigma)^2 = \text{id}$.

Let $G = D_{14}$. Consider the subgroups

$$H = \langle \tau\sigma^2\tau, \sigma^6 \rangle$$

$$K = \langle \tau\sigma^2\tau\sigma^3\tau \rangle$$

It is known that exactly one of H, K is normal in G .

- (5 pts) Prove from the given relations that $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$.
- (15 pts) Find which of the subgroups H, K is the normal subgroup, and prove your claim.
- (20 pts) Let N denote the normal subgroup you chose in the previous part. It is known that the group G/N is isomorphic to one of the groups $\{e\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4$. Find which group from this list is isomorphic to the quotient group G/N , and prove they are isomorphic.

דף נוסף לשאלה מספר 3

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____