אלגוריתם Power Method למציאת ע״ע

איתי סטופל

בהינתן מטריצה A ווקטור כלשהו $z^{(0)}$:

1. הגדירו $w^{(k)} = Az^{(k-1)}$

$$z^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{||w^{(k)}||}$$

2. חזרו ל(1) עד להתכנסות.
3. $\lim_{n\to\infty} \left||w^{(k)}|\right| = \lambda_A$

$\lim_{n\to\infty} z^{(k)} = \lambda_A$ ו"ע של

כאשר λ_A – הווקטור העצמי הגדול ביותר (בערכו המוחלט).

נתחיל את מציאת הע״ע כאשר z הוא ניחוש ונבצע אותה עד שנתכנס לווקטור מסויים ← הו״ע.

הוכחה של התכנסות השיטה תחת ההנחות:

1. A לכסינה.
2. קיים ע״ע λ_1 יחיד כך ש(λ) $|\lambda_1| = \underbrace{\max}_{\lambda \text{ ע"ע של } A}$
3. המרחב העצמי של λ_1 הוא מְמֻד 1.

(תנאי 2 הכרחי – השיטה לא תעבוד אם הוא לא יתקיים, אבל תנאים 1,3 לא הכרחיים).

מההנחות הנ״ל: קיים בסיס אורתונורמלי של ו״ע $\{v_i\}$ ולכן לכל וקטור z:

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot v_i$$

$$Az = \sum Ac_i v_i = \sum c_i \lambda_i v_i = c_1\lambda_1 \cdot \left(v_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{c_i}{c_1} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot v_i\right)$$

$$z^{(1)} = \frac{Az}{||Az||} = \frac{c_1\lambda_1}{||Az||} \cdot \left(v_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{c_i}{c_1} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot v_i\right)$$

$$Az^{(1)} = \cdots = \frac{c_1\lambda_1}{||Az||} \cdot \left(\lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{c_i}{c_1} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot v_i \cdot \lambda_1\right) = \frac{c_1\lambda_1^2}{||Az||} \cdot \left(\lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{c_i}{c_1} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^2 \cdot v_i\right)$$

$$z^{(k)} = A \cdot \left(\frac{z^{(k-1)}}{||Az^{(k-1)}||}\right) = A^2 \left(\frac{z^{(k-2)}}{||A^2 z^{(k-2)}||}\right) = \cdots = A^k \cdot \frac{z}{||A^k z||}$$

הנחה: $c_1 \neq 0$.

$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0$:

$$z^{(k)} = \frac{1}{||A^k z||} \cdot c_1 \lambda_1^k \cdot \underbrace{\left(\lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{c_i}{c_1} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \cdot v_i \right)}_{=v_1}$$

$$\left|\left|z^{(k)}\right|\right| = 1 \ \Rightarrow \left|\left| \frac{1}{||A^k z||} c_1 \lambda_1^k \cdot v_1 \right|\right| \to 1$$

נניח ש$\lambda_1 > 0$:

ולכן:

$$\frac{c_1 \lambda_1^k}{||A^k z||} \to 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left|Az^k\right|\right| = \left|\left|A \lim_{n\to\infty} z^{(k)}\right|\right| = ||A \cdot v_1|| = ||\lambda_1 v_1|| = \lambda_1$$

■