תרגיל 9

3 בינואר 2016

1. לגבי כל אחד מהייחסים הבאים קבעו האם הוא יחס סדר חלקי, קבעו אם הוא יחס סדר מלא ומצאו אם יש לו איבר מקסימלי, איבר מינימלי , גדול ביותר (מקסימום) וקטן ביותר (מינימום):
א. יחס סדר לקסיקוגרפי $\leq_{lex}$ על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ המוגדר על ידי $(a,b)\leq_{lex}(c,d)$ אם $(a<c)$ או $(a=c\ and\ b\leq d)$?
ב. יחס סדר קרטזי $\leq_{Cart}$ על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ המוגדר על ידי $(a,b)\leq_{Cart}(c,d)$ אם $(a\leq c)$ וגם $(b\leq d)$?
ג. יחס סדר $\leq$ הרגיל, המוגדר על הקבוצה $\{x\mid 0<x\leq 1\}$?
ד. $R=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\mid a^2\leq b^2\right\}$ מעל המספרים הממשיים $(\mathbb{R})$.

2. א. בקבוצה $\{2,3,4,...,999,1000\}$ הסדורה חלקית לפי | (מחלק ללא שארית) ישנם בדיוק 500 איברים מקסימליים מהם?
ב. רשום לפחות 10 איברים מינימליים בקבוצה סדורה זו.
ג. האם יש בקס"ח זו איבר קטן ביותר או איבר גדול ביותר? אם אין הוסף 2 מספרים לקבוצה שימלאו תפקידים אלו. מה יהיו האיברים המינימליים והמקסימליים בקס"ח המורחבת?

3. תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר חלקי על A.
א. נגדיר את היחס ההופכי של R על A בצורה הבאה: $R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$.
הוכיחו כי R^{-1}יחס סדר חלקי.
ב. תהי $B\subseteq A$ נגדיר $S=R\cap B\times B$ הוכיחו כי Sהוא יחס סדר.

4. הוכח או הפרך:
א. A קבוצה R יחס סדר חלקי מעל A, אם $a\in A$ איבר מינימלי יחיד אזי a הוא איבר קטן ביותר (מינימום) ב־A?
ב. A קבוצה סופית, R יחס סדר חלקי מעל A. אם $a\in A$ איבר מינימלי יחיד אזי a הוא איבר קטן ביותר (מינימום) ב־A?