תרגיל 10

1. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) לכל למרחב טופולוגי יש בסיס.
הוכחה:
יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. אזי τ בעצמו הוא בסיס לטופולוגיה.

(ב) אם B_1 בסיס לטופולוגיה τ על X, וB_2 הוא אוסף של קבוצות פתוחות כך ש$B_1 \subseteq B_2$, אז B_2 בסיס לτ.
הוכחה:
נעבור על התכונות של בסיסץ
תכונה ראשונה: צריך שX יהיה איחוד של קבוצות מB_2ץ אכןת מכיוון שX הוא איחוד של קבוצות מB_1ת ו$B_1 \subseteq B_2$, אז הוא איחוד של קבוצות מB_2.
תכונה שניה: יהי $O_1, O_2 \in B_2$, ו$x \in O_1 \cap O_2$. בפרט, O_1 וO_2 פתוחות בטופולוגיה, ולכן גם החיתוך שלהן. מכיוון שB_1 בסיס, יש $U \in B_1$ כך ש $x \in U \subseteq O_1 \cap O_2$. אבל $B_1 \subseteq B_2$. כלומר, $U \in B_2$.

(ג) יהיו τ_1 וτ_2 טופולוגיות על X, וB_1 בסיס לτ_1, אז $\tau_1 \subseteq \tau_2 \iff B_1 \subseteq \tau_2$.
הוכחה:
$\Longleftarrow$ טריוויאלי, מכיוון ש$B_1 \subseteq \tau_1$.
$\Longrightarrow$ יהי $O \in \tau_2$. אזי $O = \bigcup U_i$ כך שU_i קבוצות בB_1. (מהגדרת בסיס). נתון ש$B_1 \subseteq \tau_2$, ולכן לכל i, $U_i \in \tau_2$. כעת, τ_2 היא טופולוגיה ולכן סגורה לאיחודים. כלומר, $O = \bigcup U_i \in \tau_2$. מש"ל.

2. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהיו F_1 וF_2 קבוצות סגורות בX_1 וX_2 בהתאמה. הוכיחו ש$F_1 \times F_2$ סגורה ב$X_1 \times X_2$.
הוכחה:
$(F_1 \times F_2)^c = F_1^c \times X_2 \cup X_1 \times F_2^c$. וזה איחוד של קבוצות פתוחות, לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה. לכן $F_1 \times F_2$ סגור.

(ב) יהיו $A \subseteq X_1$ ו$B \subseteq X_2$. הוכיחו ש $\bar{A} \times \bar{B} = \overline{A \times B}$.
הוכחה:
נראה הכלה דו כיוונית:
$\supseteq$: לפי סעיף א', נקבל ש $\bar{A} \times \bar{B}$ היא קבוצה סגורה, כמכפלה של קבוצות סגורות. בנוסף, ברור ש $A \times B \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$, ולכן $\overline{A \times B} \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$.
$\subseteq$: יהי $(x,y) \in \bar{A} \times \bar{B}$. תהי Oסביבה של (x,y). מהגדרת בסיס, יש U_1 וU_2 פתוחות בX_1 ובX_2 בהתאמה, כך ש $(x,y) \in U_1 \times U_2 \subseteq O$. כעת, מכיוון ש

$x \in \bar{A}$, $U_1 \cap A \neq \emptyset$. באותו אופן, $U_2 \cap B \neq \emptyset$. כלומר, $(U_1 \times U_2) \cap (A \times B) \neq \emptyset$. וזה גורר ש $O \cap (A \times B) \neq \emptyset$. כלומר, כל סביבה של (x, y) נחתכת עם $A \times B$ באופן לא ריק $\Longleftarrow$ $(x, y) \in \overline{A \times B}$.

(ג) יהיו X וY שני מרחבים טופולוגיים עם הטופולוגיה הקוסופית. הוכיחו/הפריכו: טופולוגיית המכפלה על $X \times Y$ היא הטופולוגיה הקוסופית.
הפרכה:

נניח שX אינסופי. יהי $a \in Y$. אז לפי הסעיף הראשון, $X \times \{a\}$ היא קבוצה סגורה, אולם היא לא סופית ולא כל המרחב (בהנחה ש $|Y| \geq 2$). לכן הטופולוגיה אינה הקוסופית.

3. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהיה X מרחב טופולוגי. נגדיר את האלכסון להיות $\Delta = \{(x, x) \forall x \in X\} \subseteq X^2$. הוכיחו שאם האלכסון סגור בX^2, אז X האוסדורף.
הוכחה:

יהיו $x \neq y \in X$. אז $(x, y) \notin \Delta$. מכיוון שהאלכסון סגור, המשלים שלו פתוח. כלומר, יש סביבה בסיסית $O_1 \times O_2$ של (x, y) שמוכלת במשלים של האלכסון. במילים אחרות: $x \in O_1, y \in O_2$, O_1 וO_2 פתוחות בX, ו$(O_1 \times O_2) \cap \Delta = \emptyset$ $\Longleftarrow$ $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

(ב) מצאו דוגמא למרחב טופולוגי X עם קבוצה צפופה $A \subseteq X$ ושתי פונקציות רציפות שונות $f, g : X \to X$ המתלכדות על A.
פתרון:

ברור שצריך לבחור מרחב שאינו האוסדורף. ניקח $X = \mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הטריוויאלית, ונגדיר את שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = x$, ו$g(x) = 1$. שתיהן רציפות, כי כל פונקציה לתוך הטופולוגיה הטריוויאלית היא רציפה. הן מתלכדות על $\{1\}$, וזאת קבוצה צפופה כי בטופולוגיה הטריוויאלית כל קבוצה לא ריקה היא צפופה. (הקבוצה הסגורה הלא ריקה היחידה היא המרחב כולו.)

4. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש $X \times Y \cong Y \times X$.
הוכחה:

נגדיר $f : X \times Y \to Y \times X$ ע"י $f(x, y) = (y, x)$. קל לראות שזאת פונקציה הפיכה. נוכיח שהיא רציפה ופתוחה. מספיק לבדוק זאת על קבוצות פתוחות בסיסיות. יהיו O_1, O_2 פתוחות בX, Y בהתאמה. אזי $f(O_1 \times O_2) = O_2 \times O_1$ פתוחה ב$Y \times X$, ואילו $f^{-1}(O_2 \times O_1) = O_1 \times O_2$ פתוחה ב$X \times Y$.

5. תהי $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ קבוצה, ונגדיר עליה שני אוספים של תתי קבוצות:

$$B_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}...\}, B_2 = \{Z \subseteq X : \exists n : X \setminus Z = \{1, ...n\}\}$$

(א) הוכיחו ש$B_1 \cup B_2$ מהווה בסיס לטופולוגיה כלשהי τ על X.
הוכחה:

ראשית, צריך להוכיח שאיחוד כל הקבוצות שווה לX. כלומר, שכל נקודה בX מכוסה ע"י איזושהי קבוצה. עבור $n \in \mathbb{N}$ זה ברור, אפשר לקחת את $\{n\}$. עבור 0, ניקח את $X \setminus \{1\} \in B_2$.

כעת, יהיו O_1, O_2 פתוחות בסיסיות, ונסתכל $O_1 \cap O_2$. אם $O_1, O_2 \in B_1$, אז או שהן שוות או שהחיתוך ריק. אם $O_1, O_2 \in B_2$ אז בה"כ $O_1^c = \{1, ..., n\}$ ו$O_2^c = \{1, ..., m\}$ כך ש $n < m$. אזי $O_1 \cap O_2 = O_2$. אם $O_1 \in B_1$ ו$O_2 \in B_2$ אז $O_1 \cap O_2$ הוא או ריק, או שווה לO_2. כלומר, בכל מקרה קיבלנו קיבלנו שחיתוך של שתי קבוצות מהבסיס שווה לאיחוד של קבוצות מהבסיס.

(ב) הוכיחו ש(X, τ) הוא האוסדורף.
הוכחה:

יהיו $x \neq y \in X$. אם $x, y \neq 0$, ניקח $\{x\}, \{y\}$. אילו סביבות מפרידות.

נניח בה"כ ש $x = 0$ ו $y = n$ לאיזשהו $n \in \mathbb{N}$. נקח $\{n\}$ ו$\{1, ..., n\}^c$. אילו סביבות מפרידות.

6. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה והפיכה. הוכיחו שf הומיאומורפיזם.
הדרכה אפשרית:

(א) יהי $a < b \in \mathbb{R}$. הוכיחו שקיימים $c < d \in \mathbb{R}$ כך ש $f[a, b] = [c, d]$.
הוכחה:

$[a, b]$ הוא קטע קשיר, ולכן התמונה שלו צריכה להיות קשירה. תתי הקבוצות הקשירות היחידות של $\mathbb{R}$ הן כידוע קטעים (מכל הסוגים פתוחים, סגורים, אינסופיים וכו'). בנוסף, $[a, b]$ קומפקטי, ותמונה של קומפקטי היא קומפקטית, לכן $f[a, b]$ צריך להיות קומפקטי. תתי קבוצות קומפקטיות של $\mathbb{R}$ הן קבוצות סגורות וחסומות. לכן התמונה של $[a, b]$ צריכה להיות קטע סגור וחסום, כלומר, מהצורה $[c, d]$.

(ב) הראו בנוסף ש $f(a) = c$ ו$f(b) = d$, או להיפך. כלומר, f מעבירה את השפה לשפה.
הוכחה:

נניח בשלילה שזה לא קורה. בה"כ, נניח $f(a) = x$ עבור $x \in (c, d)$. אז $(a, b]$ הוא קבוצה קשירה, אבל התמונה שלו היא $[c.x) \cup (x, d]$ שהיא לא קשירה. בסתירה לכך שתמונה של קבוצה קשירה היא קשירה.

(ג) הסיקו שf פתוחה ולכן הומיאומורפיזם.
פתרון:

מהסעיפים הקודמים ניתן להסיק ש$f(a, b) = (c, d)$, כלומר f מעבירה פתוחה בסיסית לפתוחה, ולכן f פונקציה פתוחה. פונקציה רציפה, הפיכה ופתוחה= הומיאומורפיזם.

7. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) הוכיחו/הפריכו: לישר של סורגנפריי יש בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.
הוכחה:

הישר של סורגנפריי מוגדר ע"י כך שהבסיס שלו הוא הקבוצות מהצורה $[a, b)$, וכבר הוכחנו שכל קבוצה כזאת היא סגוחה.

(ב) הוכיחו ש $\{B_{d_5}(a, \frac{1}{5^n}), a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ מהווה בסיס למרחב המטרי $(\mathbb{Z}, d_5)$.
הוכחה:

ידוע שבכל מרחב מטרי, הכדורים מהווים בסיס לטופולוגיה המושרית מהמטריקה. לכן הקבוצה $\{B_{d_5}(a, r) : a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}^+\}$ היא בסיס. אולם, ידוע שהמרחקים

בd_5 הם רק מהצורה $\frac{1}{5^n}$, ולכן לכל $r \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $B_{d_5}(a,r) = B_{d_5}(a, \frac{1}{5^n})$. ולכן הקבוצה $\{B_{d_5}(a, \frac{1}{5^n}), a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ מהווה בסיס.