

תרגיל בית 2 - טופולוגיה

שאלה 1

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה- p -adic באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$
ראשוני מגדירים מטריקה על \mathbb{Z}

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases} \text{ , עבור } k(x, y) = \max \{i : p^i \mid (x - y)\}$$

א. הוכיחו ש $p^n \xrightarrow{d_p} 0$.

ב. תארו את הכדור $B_{d_7} \left(3, \frac{1}{49} \right)$ במרחב (\mathbb{Z}, d_7) .

ג. עבור $t \in \mathbb{Z}$ מצאו דוגמא לסדרה לא קבועה במרחב (\mathbb{Z}, d_3) המתכנסת ל- t .

שאלה 2

יהיו $x_1, x_2 \in (X, d)$ ו- $r_1, r_2 > 0$ ויהיו $B(x_1, r_1), B(x_2, r_2)$ כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק. תהי $p \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ ו- $r = \min \{r_1 - d(p, x_1), r_2 - d(p, x_2)\}$. הוכיחו ש- $B(p, r) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$.

שאלה 3

יהי (X, d) מרחב אולטרה-מטרי. הוכיחו:

א. לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $x, y \in X$ $B(x, \varepsilon) = B(y, \varepsilon)$ או $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$.

ב. $\{x_n\} \subseteq X$ סדרת קושי אם ורק אם $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

שאלה 4

במרחב ℓ_∞ הראו שהסדרה $x_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{3n}, \dots \right)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

שאלה 5

א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: יהי (X, σ) מרחב מטרי, ויהי $x_n \xrightarrow{\sigma_Y} y$ אזי $y \in Y$ ו- $\{x_n\} \subseteq Y$ תהי (Y, σ_Y) תת מרחב מטרי שלו. נגדיר את הסדרה הבאה:

$$x_n \xrightarrow{\sigma} y \text{ אמ"מ}$$

נתבונן במרחב $\langle \mathbb{I}, d \rangle$ כאשר \mathbb{I} הוא קבוצת המספרים האי-רציונאליים, ו- d היא המטריקה הסטנדרטית המושרית מ- \mathbb{R} . נגדיר את הסדרה הבאה:

$$x_n = \frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}}$$

ב. הוכיחו שהסדרה $\{x_n\} \subseteq \mathbb{I}$.

ג. הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת בתת המרחב המטרי $\langle \mathbb{I}, d \rangle$.

שאלה 6

הוכיחו או הפריכו שקיים שיכון איזומטרי במקרים הבאים:

א) $\{\sqrt{3} - \frac{n}{2n+5} : n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{Q} \cap (2004, \infty)$

ב) $(\mathbb{Z}, d_5) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_9)$

שאלת אתגר

הראו שאם $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי ו- d המטריקה המושרה מהנורמה אזי לא קיימים כדורים שונים $B(a_1, r_1), B(a_2, r_2)$ כאשר $r_1 < r_2$ ו- $B(a_1, r_1) \supset B(a_2, r_2)$.

בהצלחה!