השלמה להרצ׳ של ד״ר זבאן - 30/11/10 יום ג׳

משפט: יהיו V ממ"פ, $W\subseteq V$ תת-מרחב, $E,F\subseteq W$ בסיסים אורתונורמליים של W. אזי $\pi_E=\pi_F$, כלומר: לכל $v\in V$, $\pi_E(v)=\pi_F(v)$.

במילים אחרות: ההטלה על תת-מרחב אינה תלויה בבחירת הבא"ן שלפיו מטילים.

ה. ממשפט הפירוק הניצב, $V=W\oplus W^{\perp}$ סכום ישר, ולכן לכל $v\in V$ יש הצגה יחידה מהצורה $w+u$ כאשר $w\in W, u\in W^{\perp}$. כעת,

$$\underbrace{\pi_E(v)}_{\in W}+\underbrace{(v-\pi_E(v))}_{\in W^{\perp}}=v=\underbrace{\pi_F(v)}_{\in W}+\underbrace{(v-\pi_F(v))}_{\in W^{\perp}}.$$

מיחידות ההצגה, בהכרח $\pi_E(v)=\pi_F(v)$. //

(לאור המשפט, אפשר לסמן את ההטלה של v על W כך $\pi_W(v)$, או פשוט $\pi(v)$ אם W ברור מההקשר.)

משפט: אם $u\perp v$, אזי $\|u\pm v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

ה. $$\|u\pm v\|^2=\langle u\pm v,u\pm v\rangle=\langle u,u\rangle\pm\underbrace{\langle u,v\rangle}_{0}\pm\underbrace{\langle v,u\rangle}_{0}+\langle v,v\rangle=\|u\|^2+\|v\|^2$$ //

משפט: ההיטל של v על W הוא הוקטור ב-W הקרוב ביותר ל v, כלומר:

יהי $\pi(v)$ ההיטל של v על W. אזי:

א. לכל $w\in W$, $\|v-\pi(v)\|\leq\|v-w\|$

ב. אם $\pi(v)\neq w\in W$ אז $\|v-\pi(v)\|<\|v-w\|$.

ה. ברור ש(ב ⇐ א). נוכיח איפוא את (ב). $v-\pi(v)\perp w-\pi(v)$ (כי $w-\pi(v)\in W$ ו-$v-\pi(v)\perp W$).

מהמשפט הקודם,

$$\|v-w\|^2=\|(v-\pi(v))-(w-\pi(v))\|^2=\|v-\pi(v)\|^2+\|w-\pi(v)\|^2\underset{\uparrow}{>}\|v-\pi(v)\|^2$$

(כיון ש $w\neq\pi(v)$)

ולכן $\|v-w\|>\|v-\pi(v)\|$. //