תורת הקבוצות — תרגיל בית 4
פתרונות

חיים שרגא רוזנר

ט"ז בסיון, תשע"ה*

תקציר

איזומורפיזם סדר, חיבור סודרים, כפל סודרים, מונוטוניות ורציפות (נדחה לתרגיל בית 5).

תזכורות

1. **חיבור סודרים**: יהיו α, β סודרים. נגדיר את **הסכום הזר** שלהם

$$\alpha \uplus \beta := \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$$

ניתן להגדיר, באופן טבעי, סדר מילוני על קבוצה זו.[1] הקבוצה $\alpha \uplus \beta$ סדורה היטב על פי סדר זה, וקיים סודר אחד ויחיד אליו הקבוצה איזומורפית. נסמן סודר זה $\alpha + \beta$. חיבור סודרים איננו חילופי (קומוטטיבי).

2. **חיסור סודרים**: יהיו $\alpha \leq \beta$. נגדיר חיסור סודרים $\beta - \alpha := \mathrm{type}(\beta \setminus \alpha)$. מתקיימות התכונות הבאות (לפי תרגיל בית 3):

   (א) $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$.

   (ב) $\alpha = \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha = 0$.

   (ג) $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha > 0$.

3. **כפל סודרים**: יהיו α, β סודרים. אזי מכפלתם מוגדרת

$$\alpha \cdot \beta := \mathrm{type}\left(\beta \times \alpha, <_{\mathrm{lex}}\right)$$

דהיינו $\alpha \cdot \beta$ היא טיפוס הסדר של $\beta \times \alpha$ כאשר קבוצה זו מסודרת על ידי הסדר המילוני.

---

* להגשה עד יום **שני** ט"ו באייר (4 מאי) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

[1] הכוונה היא לסדר המושרה מהסדר המילוני על $2 \times (\alpha \cup \beta)$.

1 איזומורפיזם סדר ורישאות

1. הוכיחו כי קבוצה סדורה היטב אינה איזומורפית לאף רישא־ממש של עצמה. מצאו קבוצה A סדורה סדר מלא שהיא איזומורפית סדר לרישא־ממש של עצמה.

פתרון

- תהי A סדורה היטב, $x \in A$. נניח בשלילה כי $\overset{x}{A}$ איזומורפית סדר ל־A. נסמן איזומורפיזם סדר זה על ידי $f\colon A \to \overset{x}{A}$. ברור שמתקיים $f(x) < x$, ולכן הקבוצה $\{y \in A\colon f(y) < y\}$ איננה ריקה ויש לה איבר ראשון y המקיים $f(y) < y$. f היא איזומורפיזם סדר, ובפרט היא שומרת סדר. לכן $f(f(y)) < f(y)$, ובסתירה לכך ש־y הוא הראשון המקיים תכונה זו.
- $\mathbb{R}$ איזומורפית סדר לכל קרן שמאלית שלה. לדוגמא $x \mapsto -e^{-x}$ מתאים אותה לקרן $(-\infty, 0)$. ■

2 חיבור סודרים

1. אם $\beta_1 < \beta_2$, אז $\alpha+\beta_1 < \alpha+\beta_2$. הוכיחו גם את הכיוון השני, אם $\alpha+\beta_1 < \alpha+\beta_2$ אז $\beta_1 < \beta_2$.

פתרון נניח $\beta_1 < \beta_2$. מתקיים לפיכך $\beta_2 - \beta_1 > 0$. נזכיר כי עבור $\gamma > 0$, $\alpha+\gamma > \alpha$ מתקיים

$$\alpha + \beta_1 < (\alpha + \beta_1) + (\beta_2 - \beta_1) = \alpha + (\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)) = \alpha + \beta_2$$

המעבר הראשון נובע מהטענות שהובאו בתחילת תשובה זו, המעבר השני נובע מאסוציטיביות והשלישי מהגדרת חיסור סודרים. בגלל טריכוטומיות, הטענה היא א.ס.ם. . ■

2. בשיעור הראינו כי אם β גבולי, אז $\alpha + \beta$ גבולי. הראו כי אם β עוקב, אז $\alpha + \beta$ עוקב.

פתרון נניח $\beta = \gamma + 1$. אז $\alpha + \beta = \alpha + (\gamma + 1) = (\alpha + \gamma) + 1$. הסתמכנו כאן על אסוציטיביות חיבור סודרים ועל השויון $S(\gamma) = \gamma + 1$. ■

3. הפרך, על ידי דוגמאות נגדיות, כל אחת מהטענות הבאות:

(א) אם $0 < \beta$ אז $\alpha < \beta + \alpha$.

(ב) אם $\beta_1 < \beta_2$, אז $\beta_1 + \alpha < \beta_2 + \alpha$.

(ג) אם β גבולי, אז $\beta + \alpha = \sup\{\gamma + \alpha \,:\, \gamma < \beta\}$.

(ד) אם β גבולי, אז $\beta + \alpha$ גבולי.

(ה) אם $\alpha < \beta$ גבוליים אז $\beta + \alpha = \alpha$.

פתרון

(א) $0 < 1$ אבל $1+\omega = \omega \not< \omega$.

(ב) $1 < 2$, אבל $2+\omega = \omega \not< \omega = 1+\omega$.

(ג) ניקח $\alpha = 1$, $\beta = \omega$ (העיקר ש־α עוקב[2] ו־β גבולי). ואז

$$\omega + 1 \neq \omega = \sup\{\gamma+1 \colon \gamma < \omega\}$$

(ד) ניקח $\alpha = 1$.

(ה) $\omega < \omega \cdot 2$ הם סודרים גבוליים, אך $\omega \cdot 2 \neq \omega \cdot 3 = \omega \cdot 2 + \omega$. ■

3 כפל סודרים

1. הוכיחו:

(א) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$.

(ב) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

(ג) $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$. נא להוכיח במישרין מן ההגדרות, ולא להסתמך על חוק הפילוג.

(ד) אם β גבולי, $\alpha > 0$, אז $\beta \cdot \alpha$ גבולי.

פתרון

(א) לכל קבוצה A, מתקיים $\varnothing = A \times \varnothing = \varnothing \times A$, ולכן טיפוס הסדר הוא 0.

(ב) אגף ימין איזומורפי סדר ל־$(\gamma \times \alpha) \uplus (\beta \times \alpha)$, ואגף שמאל איזומורפי ל־$\alpha \times (\beta \uplus \gamma)$. חוק הפילוג חל בין $\uplus$ למכפלה קרטזית.

(ג) מתקיים השויון $\alpha \uplus \alpha = \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \alpha = \{0,1\} \times \alpha = 2 \times \alpha$, ועל שני הצדדים חל אותו סדר מילוני.

(ד) נניח בשלילה כי $\beta \cdot \alpha$ עוקב (ברור שאיננו אפס). אזי בקבוצה $\alpha \times \beta$ עם הסדר המילוני יש איבר אחרון, נסמנו (γ, δ). אבל $(\gamma, \delta + 1)$ גם הוא שייך ל־$\alpha \times \beta$, בניגוד לטענה לגבי האיבר האחרון בקבוצה זו. סתירה. ■

2. הפריכו:

(א) $(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$.

(ב) אם $\beta_1 < \beta_2$ ו־$\alpha > 0$ אז $\beta_1 \cdot \alpha < \beta_2 \cdot \alpha$.

(ג) $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.

(ד) לכל β גבולי, $\beta \cdot \alpha = \sup\{\gamma \cdot \alpha \colon \gamma < \beta\}$.

פתרון

(א) $(1+1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega$.

(ב) $2 \cdot \omega = \omega = 3 \cdot \omega$.

(ג) $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega$.

(ד) ניקח $\alpha = 3$, $\beta = \omega$. $\omega \cdot 3 \neq \omega = \sup\{3n \colon n \in \omega\} = \sup\{\gamma \cdot 3 \colon \gamma < \omega\}$.

■

[2] למעשה, יש עוד אפשרויות. הן כרוכות בכך שיהיו מעורבים כאן סדרי גודל שונים ביחס להצגה הנורמלית של קנטור בין α ובין β.

4 מונוטוניות ורציפות

(חלק זה נדחה לתרגיל בית 5)

ב ה צ ל ח ה!