## פיתרון לתרגיל מספר 4:

### תשובה 1:

$$\sum_{i=0}^{4} \mathrm{P}(X=i)=1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{4} \frac{k-i}{3k}=1$$

$$\sum_{i=0}^{4} \frac{k-i}{3k}=\frac{k}{3k}+\frac{k-1}{3k}+\frac{k-2}{3k}+\frac{k-3}{3k}+\frac{k-4}{3k}=\frac{5k-10}{3k}=1 \quad \Rightarrow \quad k=5$$

### תשובה 2:

א. פונקצית ההתפלגות של $Z=(X-2)^2$

| z | 0 | 4 | 16 | 36 | |
|---|---|---|---|---|---|
| P(z) | 2/9 | 1/9+3/9 | 2/9 | 1/9 | |

מכאן ישירות מחשבים עפ"י הנוסחא את התוחלת והשונות:

$$E(Z)=0\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{4}{9}+16\cdot\frac{2}{9}+36\cdot\frac{1}{9}=\frac{28}{3}$$

$$Var(Z)\approx 120.9$$

להלן פונקצית ההתפלגות של $Y=\frac{(X-2)}{(X+2)}$

| y | -1 | 0 | 1/3 | 1/2 | 3/5 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(y) | 1/9 | 2/9 | 3/9 | 2/9 | 1/9 |

$$E(Y)=-1\cdot\frac{1}{9}+0\cdot\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{45}$$

$$Var(Y)\approx 0.2584$$

$W=\frac{X+2}{X-2}$ אינו משתנה אקראי. הוא אינו מוגדר על כל המרחב (בערך $X=2$).

ב.

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\left(\frac{3}{2}\right)$$

הסבר למעבר האחרון (כמו שעשינו בכיתה)

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot p^{k-1}=\frac{d}{dp}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k\right)=\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}\right)=\frac{1}{(1-p)^2}$$

**תשובה 3:**

מרחב המדגם מונה $126 = \binom{9}{4}$ אפשרויות. הערכים האפשריים ל –X הם: 1,2,3.

$$P(X=1) = P(four\ black) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} = 1/126 = 0.007$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2} + \binom{4}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{9}{4}} = 72/126 = 0.571$$

$$P(X=2) = 1 - P(X=1) - P(X=3) = 53/126 = 0.42$$

**תשובה 4:**

א. (עם החזרה)

| $P(X=k)$ | **k** |
|---|---|
| $\left(\frac{20}{30}\right)^2$ | 0 |
| $2\frac{10}{30}\frac{20}{30}$ | 1 |
| $\left(\frac{10}{30}\right)^2$ | 2 |

$$E[X] = 2\frac{10}{30}\frac{20}{30}\cdot 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2 = \frac{2}{3}, \quad E[X^2] = 2\frac{10}{30}\frac{20}{30}\cdot 1^2 + \left(\frac{10}{30}\right)^2 \cdot 2^2 = \frac{8}{9}$$

$$Var[X] = \frac{8}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{8}{81}$$

ב. (בלי החזרה)

| $P(X=k)$ | k |
|---|---|
| $\frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}$ | 0 |
| $2\cdot\frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}$ | 1 |
| $\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}$ | 2 |

$$E[X]=2\cdot\frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot 1+\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot 2=\frac{2}{3}\quad,\quad E[X^2]=2\cdot\frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot 1^2+\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot 2^2=\frac{76}{87}$$

$$Var[X]=\frac{76}{87}-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

שימו לב . התוחלת זהה בשני הסעיפים, השונות משתנה במקרה של הוצאה עם או בלי החזרה.

**<u>תשובה 5:</u>**

| Y\X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 11/36 |
| 2 | 0 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 9/36 |
| 3 | 0 | 0 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 7/36 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 5/36 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 1/18 | 3/36 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 1/36 |
| | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 | |

ב. ניתן לחשב עבור כל משבצת את הערך של המשתנה המקרי X+Y, להכפיל בהסתברויות ולחבר, וניתן להשתמש גם בלינאריות של התוחלת E(X+Y) = E(X) + E(Y), ולחשב את התוחלות לפי ההתפלגויות השוליות:

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}=4.472$$
$$E(Y)=1\cdot\frac{11}{36}+2\cdot\frac{9}{36}+3\cdot\frac{7}{36}+4\cdot\frac{5}{36}+5\cdot\frac{3}{36}+6\cdot\frac{1}{36}=\frac{91}{36}=2.572$$
$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=4.472+2.572=7.044$$

**<u>תשובה 6:</u>**

נסמן ב- X (משתנה מקרי) את מספר זוגות הכרטיסים שישארו בקופסא.

נגדיר משתנה מיקרי $X_k$ עבור $k=1,\dots,N$ באופן הבא: $X_k=1$ אם הזוג שכתוב עליו $k$ נשאר בקופסא, אחרת $X_k=0$ . מכאן רואים שמתקיים $X=\sum_{k=1}^{N}X_k$ . עתה,

$$E(X_k)=1\cdot P(X_k=1)+0\cdot P(X_k=0)=P(X_k=1)=\binom{2N-2}{m}/\binom{2N}{m}$$

במונה : מספר האפשרויות לבחירת $m$ כרטיסים מ- 2N הכרטיסים שבקופסא למעט 2 הכרטיסים שרשום עליהם $k$ .

לבסוף $E(X)=\sum_{k=1}^{N}E(X_k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}=N\cdot\frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}=\frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2(2N-1)}$

**<u>תשובה 4:</u>**

נגדיר מ"מ $X$ = מספר החלפות הסימן מ- $X_0$ עד ל- $X_n$ אזי $X_n=(-1)^X$ . $X$ מתפלג בינומית באופן הבא:$X\sim Bin(n,1-p)$ כש $P(X=k)=\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$.

הערכים האפשריים עבור $X_n$ הם $\{1,-1\}$ לכן צריך למצא את $P(X_n=1),P(X_n=-1)$ . נשים לב ש $P(X_n=1)=P(\text{X זוגי})$, $P(X_n=-1)=P(\text{X אי זוגי})$ לכן התוחלת של $X_n$ היא:

$$E(X_n)=1\cdot P(\text{X זוגי})+(-1)\cdot P(\text{X אי זוגי})=P(\text{X זוגי})-P(\text{X אי זוגי})$$

כמו כן

$$E(X_n)=E((-1)^X)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-1)^k p^{n-k}=(2p-1)^n$$

שימו לב : במעבר הלפני אחרון $(-1)^k(1-p)^k=(p-1)^k$ ובמעבר האחרון , לפי נוסחאת הבינום $(2p-1)^n=\left((p-1)+p\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-1)^k p^{n-k}$.

לכן $P(\text{X זוגי})-P(\text{X אי זוגי})=(2p-1)^n$ אבל גם $P(\text{X זוגי})+P(\text{X אי זוגי})=1$

ולפי 2 המשוואות הנ"ל נקבל ש :

$$P(X_n=1)=P(X=\text{זוגי})=\frac{1+(2p-1)^n}{2}$$

$$P(X_n=-1)=1-P(X_n=1)=\frac{1-(2p-1)^n}{2}$$