תזכורת: מטריקות שקולות.
על אותה קבוצה מגדירים שתי מטריקות שונות, d, ρ. נגיד ששתיהן שקולות אם יש בהן את אותה התכנסות של סדרות.
כלומר, $x_n \to_d x$ אמ"ם $x_n \to_\rho x$.
תזכורת נוספת: מרחב מטרי נקרא "מרחב שלם" אם כל סדרת קושי מתכנסת.
טענה: מטריקות שקולות לא שומרות על תכונת השלמות. כלומר, ייתכן שd וρ שקולות. אבל (X, d) הוא מרחב שלם, ואילו (X, ρ) הוא לא מרחב שלם.
דוגמא: $X = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. נגדיר עליה שתי מטריקות: d- המטריקה האוקלידית שמושרית מ$\mathbb{R}$.
ρ- מטריקת $0-1$.
נראה שהן שקולות: במטריקת $0-1$ מתקיים $x_n \to x$ אמ"ם הסדרה קבועה לבסוף על x.
במטריקה האוקלידית על X, מתקיים אותו דבר. כי המרחק בין $\frac{1}{n}$ לכל מספר אחר בX הוא לפחות $\min\{|\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}|, |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}|\}$.
מטריקת $0-1$ על כל קבוצה היא מרחב שלם, כי סדרת קושי היא בהכרח סדרה קבועה לבסוף. (החל ממקום מסויים המרחק בין כל שני איברים בסדרה חייב להיות קטן מחצי, אז הם שווים). כלומר, כל סדרת קושי מתכנסת.

המטריקה האוקלידית על X היא לא מרחב שלם. כי $\frac{1}{n}$ בעצמו הוא סדרת קושי שאינה מתכנסת במרחב.

1. הגדרה: תהי $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ פונקציה בין מרחבים מטריים. נאמר שf היא רציפה ב$x \in X$ אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X, d(x, y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$$

2. נאמר שf רציפה אם היא רציפה בכל נקודה.

3. תנאים שקולים:
   (א) f רציפה
   (ב) f שומרת התכנסות. כלומר, אם $x_n \to x$ אז $f(x_n) \to f(x)$
   (ג) תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה. כלומר, אם $A \subseteq Y$ פתוחה, אז $f^{-1}(A)$ פתוחה.
   (ד) תמונה הפוכה של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה. כלומר, אם $A \subseteq Y$ סגורה, אז $f^{-1}(A)$ סגורה.

4. f נקראת "רציפה במ"ש" אם

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$$

5. f נקראת "פונקציית ליפשיץ" אם קיים k מסויים כך שלכל $x, y \in X$
$$\rho(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

6. תרגיל: נגדיר את פונקציית ההטלה $\pi_i : l_\infty \to \mathbb{R}$ =l_∞ סדרות חסומות. הפונקציה פשוט שולפת את הקורדינטה ברכיב הi. הוכיחו שהפונקציה הזאת היא פונקציית ליפשיץ.
פתרון: נקח $k = 1$.

$$\rho(\pi_i(x), \pi_i(y)) = |\pi_i(x) - \pi_i(y)| \leq \sup_i\{|x_i - y_i|\} = d(x, y)$$

בפרט, פונקציית ההטלה היא רציפה.
למעשה, דרך נוספת להוכיח שפונקציית ההטלה רציפה, היא להראות שהיא שומרת על התכנסות. ובתרגול הקודם הראינו שהתכנסות בl_∞ גוררת התכנסות בכל רכיב.

7. תרגיל: הוכיחו שפונקציה רציפה במ"ש מעבירה סדרת קושי לסדרת קושי. כלומר, אם $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ וf רציפה במ"ש, ו$\{x_n\}$ היא סדרת קושי, אז $\{f(x_n)\}$ היא סדרת קושי.
פתרון: יהי ϵ. קיימת איזשהי δ כך שאם המרחק בין שני איברים קטן מδ, המרחק בין התמונות שלהם קטן מϵ. נתון שהסדרה $\{x_n\}$ היא סדרת קושי. לכן קיים איזשהו N כך שלכל $n, m > N$ $d(x_n, x_m) < \delta$. מהרציפות במ"ש, אנחנו יודעים ש$\rho(f(x_n), f(x_m)) <$ ϵ. כלומר, לכל $n, m > N$ נקבל ש$\rho(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$.

8. תרגיל המשך: הוכיחו שפונקציה רציפה לא בהכרח מעבירה סדרת קושי לסדרת קושי.
פתרון: $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. היא רציפה.
נקח $x_n = \dfrac{1}{n+1}$. היא סדרת קושי. אבל $f(x_n) = n + 1$ שאינה סדרת קושי ב$\mathbb{R}$.

9. הערה: ניתן להשתמש בפונקציות רציפות בשביל להוכיח שקבוצות מסויימות הן פתוחות או סגורות. ע"י כך שנראה שהן התמונה ההפוכה תחת הפונקציה הרציפה של איזה קבוצה פתוחה/סגורה.

(א) הוכיחו ש$X = \{(x, y) : xy < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ היא תת קבוצה פתוחה.
פתרון: נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. אתם יודעים שהיא רציפה כי היא פולינום.

$$X = f^{-1}(-\infty, 1)$$

(ב) תוכיחו בש"ב שהפונקציה הבאה היא רציפה: לכל מרחב מטרי (X, d) ולכל $a \in X$, ניתן להגדיר

$$f_a : X \to \mathbb{R}$$

$$f_a(x) = d(x, a)$$

(ההוכחה מסתמכת על אי שוויון המשולש). באותו אופן גם הפונקציה

$$f_A(x) = d(x, A)$$

תהיה רציפה, עם אותה הוכחה. כי הוכחנו שאי שוויון המשולש מתקיים גם עבור שתי נקודות וקבוצה.

(ג) תרגיל: הוכיחו שכדור סגור הוא קבוצה סגורה $B[a,r]=\{x\in X: d(x,a)\leq$
$.r\}$
פתרון:

$$B[a,r]=f_a^{-1}(-\infty,1]=f_a^{-1}=[0,1]$$

סגורים

1. הגדרה: תהי X תת קבוצה של מרחב מטרי. הסגור הסידרתי של X, מסומן ב$scl(X)$, הוא האוסף של כל הגבולות של סדרות מX. כלומר,

$$scl(X)=\{x:\exists\{x_n\}\subseteq X, x_n\to x\}$$

2. תרגיל: בl_∞ נסתכל על X אוסף כל הוקטורים המתאפסים לבסוף. מצאו את $scl(X)$.
פתרון: $(1,1,1,...)$.

$$(1,0,0,...)$$

$$(1,1,0,0,0,...)$$

$$(1,1,1,0,0,0,)$$

היינו מצפים שהסדרה הנ"ל תתכנס לוקטור הראשון אבל זה לא קורה. כי המרחק של כל איבר בסדרה מהוקטור הראשון הוא 1.
תשובה: $scl(X)$ זה כל הוקטורים שמתכנסים ל0.
הוכחה: יהי $x=(x_i)$ וקטור אינסופי חסום שהוא בעצם סדרה שמתכנסת ל0.
נבנה סדרת וקטורים בX ששואפת אליו ע"י שכל פעם נקטע אותו ונשים אפסים בכל השאר.

$$(x_1,0,0,...)$$

$$(x_1,x_2,0,0,,...)$$

המרחק של סדרת הוקטורים מהוקטור הראשון הוא $\sup_{n>N}\{|x_n|\}$, כלומר, הסופרימום של הזנב של הסדרה. וידוע שזה שואף ל0 כי הסדרה שואפת ל0.
כיוון שני: תהי $x=(x_i)$ סדרה שלא מתכנסת ל0. (וקטור אינסופי חסום שלא מתכנס ל0).
כלומר, קיים ϵ כך שקיימת תת סדרה (x_{i_m}) שכל האיברים בה בערך מוחלט גדולים מϵ.
ולכן המרחק של הוקטור הזה מכל וקטור שהוא 0 לבסוף יהיה לפחות ϵ.

3. תרגיל: הוכיחו שקבוצה A היא סגורה אמ"ם היא מכילה את כל הגבולות של סדרות בה.
הוכחה: $\Leftarrow$ תהי A קבוצה סגורה. ויהי x נקודת גבול, כלומר קיימת סדרה $x_n\to x$, $A\supseteq\{x_n\}$. רוצים להוכיח ש$x\in A$. אחרת, $x\in A^c$. A^c פתוח. מהגדרת קבוצה פתוחה,

קיים $\frac{1}{n}$ כך ש$B(x,\frac{1}{n}) \subseteq A^c$. אבל אז לא ייתכן שיש סדרה בA שמתכנסת לx, כי החל ממקום מסויים המרחק של כל האיברים בה מx צריך להיות קטן מ$\frac{1}{n}$. סתירה.
$\Rightarrow$ תהי A קבוצה שמכילה את כל נקודות הגבול שלה. רוצים להוכיח שהיא סגורה. כלומר, שA^c פתוחה. נניח בשלילה שA^c לא פתוחה. כלומר, קיימת $x \in A^c$ כך שלכל $\frac{1}{n}$, $B(x,\frac{1}{n}) \nsubseteq A^c$, כלומר $B(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. נבחר $x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap A$. וככה נבנה סדרה ב$A$ שהגבול שלה הוא $x \in A^c$. סתירה להנחה.

4. תרגיל: לכל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה הגרף שלה $G_f=\{(x,f(x))\}$ סגור ב $\mathbb{R}^2$.
הוכחה: נוכיח שG_f סגור לגבולות. כלומר, אם $(x_n,y_n) \subseteq G_f$ ו$(x_n,y_n) \to (x,y)$ אז צריך להוכיח ש$(x,y) \in G_f$. $(x_n,y_n) \subseteq G_f$ אומר ש$y_n = f(x_n)$. ידוע מאינפי 3 שהתכנסות ב$\mathbb{R}^2$ היא רכיב-רכיב. לכן $x_n \to x$ ו$y_n = f(x_n) \to y$. אבל f היא פונקציה רציפה, לכן $f(x_n) \to f(x)$. מיחידות הגבול, $y = f(x)$. כלומר, $(x,y) \in G_f$.

5. שאלת המשך: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונניח שאנחנו יודעים שG_f סגור ב$\mathbb{R}^2$. האם f רציפה?
פתרון:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

ברור שהפונקציה לא רציפה. נוכיח שהגרף סגור. הגרף הוא איחוד של שתי קבוצות $\{(0,0)\}\cup\{(x,y):xy=1\}$
נקודון הוא תמיד סגור. והקבוצה השניה היא תמונה הפוכה תחת פונקציה רציפה של הנקודון 1, ונקודון הוא סגור. וידוע שאיחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.