אינפי II תיכוניסטיים - תרגיל I

שעות קבלה בתיאום מראש במייל.

__ציון:__ תרגילים - 10% יש להגיש __לפחות__ 70% (מתוך כלל מטלות)

תרגיל XI - 10%

80% - ציון מבחן

טורי טיילור

__משפט__ - יחידות הצגה של פו' רציפים נגזרותיה

נניח ש- $f^{(n)}(0)$ קיימת. אזי קיימת הצגה יחידה $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + r_n(x)$

כך ש- $\frac{r_n(x)}{x^n} \longrightarrow 0$ כאשר $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ($r_n(x)$ נקרא משבר $o(x^n)$)

__הגדרה__ - טור טיילור ומקלורין

עבור הפו' $f(x)$ הגזירה אינסוף פעמים, נגדיר את טור טיילור שלה סביב הנק' x_0:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

עבור $x_0=0$ הטור יקרא טור מקלורין של f

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

תרגול

חשבו את טורי מקלורן של הפונ' הבאות:

I $f(x) = e^x$ (רק לזכור):

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

II $f(x) = \sin x$ (לחשב במיז):

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$\vdots$$

לכן:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

שימו לב! $\sin x$ היא פונ' אי זוגית ולכן המקדמים כאלה "מתאפסים" כי הם של זוגיים.

III $f(x) = \cos x$ (רק לזכור):

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$$

ח $f(x) = \ln(x+1)$ (טיילור סדר 3):

$$f(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!\, x^{n+1}$$ סוף!

ט $f(x) = \frac{1}{1-x}$ (טיילור סדר 3):

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2!$$

$$f'''(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4} \Rightarrow f'''(0) = 3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$$

לכן:
$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

לסיכום, טענו כבר את הנוסחא הכללית (סכום טור הנדסי) ואנו יודעים שהיא נכונה רק עבור $-1<x<1$

(VI) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ (רק לציין):
$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

הערה

יתכנו נק' בהן טור הטיילור של הפונ' אינו מתכנס אליה. לדוגמא: הטור של $\frac{1}{1-x}$ מתכנס לפונ' רק כאשר $-1<x<1$. מתקיים:
$$f(x)=T(x) \iff r_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

תרגיל

בעזרת התרגיל הקודם חשבו את טור מקלורן של $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ ואת $f^{(103)}(0)$

נשים לב ש- $T_{\frac{1}{1+x}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $f(x)=\frac{x}{1+x^2}=x\cdot\frac{1}{1+(x^2)^1}$

לכן:
$$T(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$$

ולפי יחידות ההצגה ניתן לומר שזה טור מקלורן של הפו'. כפי שראינו לפי הנוסחא של טור מקלורן, המקדם של x^{103} שווה ל- $\frac{f^{(103)}(0)}{103!}$, ומצד שני הוא שווה ל- $(-1)^{51}=-1$, לכן
$$f^{(103)}(0)=-103!$$

תרגיל

חשבו את טור מקלורן של הפו' $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

נזכר ש- $T_{\frac{1}{1-x}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

ו- $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}$

לכן

$$T(x)=(1+x+x^2+x^3+\dots)\cdot(1+x+x^2+x^3+\dots)$$

נשים לב שלאחר פתיחת הסוגריים, x^n נקבל $n+1$ פעמים: הרי לכל $0\le i\le n$, $x^i\cdot x^{n-i}=x^n$

ולכן המקדם של x^n יהיה $n+1$ ובסה"כ:

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$$

ולפי יחידות ההצגה נכון לומר שזהו טור מקלורן של הפו'.

(בהמשך הקורס נלמד שיטה מעניינת יותר לחשב את טור מקלורן של הפו' ע"י גזירה איבר-איבר)

תרגיל

מצאו את טור טיילור סביב $x=\frac{\pi}{4}$ של $f(x)=\cos x$

נשתמש בזהות $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ ונקבל:

$$\cos(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{2n!}-\frac{(-1)^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

משפט (שארית לגרנז')

תהי $f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים. לכן מתקיים:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כאשר c הוא בין x_0 ל-x. $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ נקראת

שארית לגרנז' עבור n.

תרגיל

חשבו את $\ln 1.5$ בדיוק של 10^{-2}

נגדיר $f(x) = \ln(1+x)$. לכן ניתן לראות כי

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$$

$$\Downarrow$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

לפי משפט, שארית לגרנז' היא מהצורה

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} |x^{n+1}|$$

עבור הנק' $x = \frac{1}{2}$, $0 \le c \le \frac{1}{2}$. מתקיים:

$$|r_n(\tfrac{1}{2})| = \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \underset{0 \le c \le \frac{1}{2}}{\le} \frac{1}{(n+1) \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \underset{\text{נדרש}}{\le} 10^{-2}$$

כלומר, נמצא $n\in\mathbb{N}$ כך ש:

$$100 < (n+1)2^{n+1}$$

עבור $n=4$ מתקיים הדרוש ולכן צריך לחשב את הטור עד סדר 4, משמע:

$$\ln 1.5 \approx 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} = 0.401$$

עם שגיאה לכל היותר של 10^{-2}.