נכתב על ידי יהונתן רגב

אי שוויון המשולש

לכל $v,w \in V$ מתקיים: $||v+w|| \le ||v|| + ||w||$.

בנוסף, מתקיים שוויון אם ורק אם $w = \alpha \cdot v$, כאשר $\alpha \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ (תלות לינארית חיובית).

הוכחה

$$||v+w||^2 = < v+w, v+w > = < v,v > + < v,w > + < w,v > + < w,w >$$

$$||v+w||^2 = < ||v||^2 + < v,w > + \overline{< v,w >} + ||w||^2$$

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + 2 \cdot Re(< v,w >) + ||w||^2$$

$$||v+w||^2 \le ||v||^2 + 2 \cdot |< v,w >| + ||w||^2$$

$$||v+w||^2 \overset{\text{קש"ב}}{\le} ||v||^2 + 2 \cdot ||v|| \cdot ||w|| + ||w||^2$$

$$||v+w||^2 \le (||v|| + ||w||)^2$$

$$||v+w|| \le ||v|| \cdot ||w||$$

$||v+w|| = ||v|| \cdot ||w||$ אם ורק אם $\{v,w\}$ תלויים לינארית, ז"א: $w = \alpha \cdot v$. במקרה זה:

$$| < v,w > | = | < v, \alpha \cdot v > | = |\bar{\alpha} \cdot < v,v >| = |\alpha| \cdot ||v||^2$$

$$Re(< v,w >) = Re(< v, \alpha \cdot v >) = Re(\bar{\alpha} \cdot < v,v >) = Re\left(\bar{\alpha} \cdot ||v||^2\right)$$

$$Re\left(\bar{\alpha} \cdot ||v||^2\right) = |\alpha| \cdot ||v||^2 \Leftrightarrow |\alpha| = Re(\bar{\alpha}) = Re(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}_{\ge 0}$$

$\blacksquare$

זהות פולרית

ידוע ש - $||\ \ ||$, מושרית ממ"פ $<,>$. האם ניתן לשחזר $<,>$ החל מ - $||\ \ ||$?

נתון $||v||$ לכל $v \in V$. צריך לחשב $< v,w >$ לכל $v,w \in V$.

ניקח $v,w \in V$.

$$||v+w||^2 = <v+w,v+w> = <v,v> + <v,w> + <w,v> + <w,w>$$

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + <v,w> + \overline{<v,w>} + ||w||^2$$

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + 2\cdot Re(<v,w>) + ||w||^2$$

$$Re(<v,w>) = \frac{1}{2}\cdot\left(||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right)$$

לכן, אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, נקבל את הזהות הבאה:

זהות פולרית ממשית

$$<v,w> = \frac{1}{2}\cdot\left(||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right).$$

למה

לכל $v,w\in V$ מתקיים: $Re(<v,w>) = Im(<v,-iw>)$.

הוכחה

$$<v,-i\cdot w> = \overline{-i}\cdot<v,w> = i\cdot<v,w>$$

נסמן $<v,w> = x+i\cdot y$.

אזי:

$$<v,-i\cdot w> = i\cdot(x+i\cdot y) = -y+i\cdot x$$

לכן:

$$x = Re(<v,w>) = Im(<v,-i\cdot w>)$$

מכאן נקבל:

$$Im(<v,w>) = Re(<v,i\cdot w>) = \frac{1}{2}\cdot\left(||v+i\cdot w||^2 - ||v||^2 - ||i\cdot w||^2\right)$$

$$Im(<v,w>) = \frac{1}{2}\cdot\left(||v+i\cdot w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right)$$

זהות פולרית כללית

$$< v,w > = \frac{1}{2}\cdot\left(||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(||v+i\cdot w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right)$$

זהות פולרית ממשית – צורה נוספת

$$< v,w > = \frac{1}{4}\cdot\left(||v+w||^2 - ||v-w||^2\right)$$

תרגיל: בדקו!

<u>מרחב נורמי</u>

הגדרה

יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב וקטורי. אומרים שפונקציה $||\ \ ||: V \to \mathbb{R}$ היא **נורמה** אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. <u>הומוגניות</u>: לכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$: $||\alpha\cdot v|| = |\alpha|\cdot||v||$.
2. <u>חיוביות</u>: לכל $v \in V$: $||v|| \geq 0$ ו: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$.
3. <u>אי שוויון המשולש</u>: לכל $v,w \in V$: $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$.

שאלה: האם כל מרחב נורמי הינו מרחב מכפלה פנימית, או, מדויק יותר, האם כל נורמה מושרית ממכפלה פנימית?

משפט (כלל המקבילית)

יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב מכפלה פנימית ותהי $<,>$ מכפלה פנימית (מעל V) תהי $||\ \ ||$ הנורמה המושרית ע"י מכפלה פנימית זו. אזי לכל $v,w \in V$ מתקיים: $2\cdot\left(||v||^2 + ||w||^2\right) = ||v+w||^2 + ||v-w||^2$.

הוכחה

$$2\cdot\left(||v||^2 + ||w||^2\right) = 2\cdot(< v,v > + < w,w >)$$

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = < v+w, v+w > + < v-w, v-w >$$

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = < v,v > + < v,w > + < w,v > + < w,w > + < v,v > - < v,w > - < w,v > + < w,w >$$

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2\cdot(< v,v > + < w,w >)$$

לכן:

$$2\cdot\left(||v||^2+||w||^2\right)=||v+w||^2+||v-w||^2$$

דוגמה

$V=\mathbb{R}^2$. נגדיר, לכל $p>0$, את הנורמה הבאה: אם $v=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, אז

$||v||_p=(|\alpha_1|^p+|\alpha_2|^p)^{\frac{1}{p}}$.

תרגיל: בדקו שלכל p, $||\quad||_p$ היא אכן נורמה!

טענה

$||v||_p$ מושרית ממכפלה פנימית אם ורק אם $p=2$.

הוכחה

ניקח:

$$v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

נחשב:

$$2\cdot\left(||v||^2+||w||^2\right)=2\cdot(1+1)=4=2^2$$

$$v+w=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},v-w=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$||v+w||_p^2+||v-w||_p^2=2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{2}{p}}=2\cdot2^{\frac{2}{p}}=2^{1+\frac{2}{p}}$$

אם כלל המקבילית מתקיים:

$$2^2=2^{1+\frac{2}{p}}$$

$$2=1+\frac{2}{p}$$

$$1=\frac{2}{p}$$

$$p=2$$

$$\blacksquare$$