רשימת הגדרות

נכתב על ידי נועם יערי

1. **<u>פונקציה עולה ממש, עולה, קבועה, יורדת, יורדת ממש</u>**

פונקציה $f(x)$ היא:

- עולה ממש אם לכל $a<b$ בתחום הפונקציה: $f(a)<f(b)$.
- עולה אם לכל $a<b$ בתחום הפונקציה: $f(a)\leq f(b)$.
- קבועה אם לכל $a<b$ בתחום הפונקציה: $f(a)=f(b)$.
- יורדת אם לכל $a<b$ בתחום הפונקציה: $f(a)\geq f(b)$.
- יורדת ממש אם לכל $a<b$ בתחום הפונקציה: $f(a)>f(b)$.

2. **<u>מקסימום מקומי, מינימום מקומי, נקודת אקסטרמום</u>**

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע נתון.

- נקודה c בקטע היא נקודת מקסימום מקומי אם קיימת סביבה של הנקודה c בה לכל x: $f(x)\leq f(c)$.
- נקודה c בקטע היא נקודת מינימום מקומי אם קיימת סביבה של הנקודה c בה לכל x: $f(x)\geq f(c)$.
- נקודה c בקטע היא נקודת אקסטרמום (נקודת קיצון) אם היא נקודת מקסימום מקומי או נקודת מינימום מקומי.

3. **<u>משוואת המשיק בנקודה</u>**

משוואת המשיק לגרף פונקציה f הגזירה בנקודה a היא:

$$y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$$

4. **<u>פונקציה קעורה בנקודה</u>**

עבור פונקציה f:

נאמר ש – f קעורה ב – a, אם גרף הפונקציה נמצא מתחת למשיק בסביבה של a.

כלומר, קיימת סביבה מנוקבת של a, בה:

$$f(x)<g(x)\coloneqq f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$$

5. **<u>פונקציה קמורה בנקודה</u>**

נאמר ש – f קמורה ב – a, אם גרף הפונקציה נמצא מעל למשיק בסביבה של a.

כלומר, קיימת סביבה מנוקבת של a, בה:

$$f(x)>g(x)\coloneqq f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$$

6. **<u>נקודת פיתול של פונקציה</u>**

נאמר ש a – נקודת פיתול אם קיימות סביבות חד צדדיות בהן הסימן : $f(x)-g(x)$ שונה (כאשר $g(x) \coloneqq f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$).

7. **<u>אסימפטוטה של פונקציה ב - ∞</u>**

אסימפטוטה של פונקציה f ב - ∞ היא ישר $y=a\cdot x+b$ כך ש :

$$f(x)-(a\cdot x+b)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

8. **<u>אסימפטוטה של פונקציה ב - $-\infty$</u>**

אסימפטוטה של פונקציה f ב - $-\infty$ היא ישר $y=a\cdot x+b$ כך ש :

$$f(x)-(a\cdot x+b)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$$

9. **<u>אסימפטוטה אנכית</u>**

אסימפטוטה אנכית היא ישר $x=a$ כך ש - $|f(x)|\xrightarrow[x\to a]{}\infty$.

10. **<u>פונקציה קדומה</u>**

g היא פונקציה קדומה של f בתחום A אם לכל $x\in A$: $g'(x)=f(x)$. נדרוש כי לכל $x\in A$, קיימת לפחות סביבה חד צדדית של x המוכלת ב - A.

11. **<u>האינטגרל הלא מסויים של פונקציה</u>**

האינטגרל הלא מסוים של פונקציה f הוא קבוצת כל הפונקציות הקדומות של f, ומסומן : $\int f(x)dx$

12. **<u>פונקציה רציונאלית</u>**

פונקציה רציונאלית היא מנה של שני פולינומים : $\frac{p(x)}{q(x)_{\neq 0}}$

13. **<u>חלוקה של קטע סגור</u>**

חלוקה של קטע סגור $[a,b]$ היא קבוצה סופית $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$ עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו כך ש :

$$a=x_0<\cdots<x_n=b$$

חלוקה של קטע סגור מחלקת אותו לתת קטעים סגורים (ניתן להציגו כאיחוד של קטעים סגורים).

נכתב על ידי נועם יערי

14. **חלוקה מנוקדת של קטע סגור**

חלוקה מנוקדת של קטע סגור $[a,b]$ היא חלוקה $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$, יחד עם בחירה של נקודה $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ לכל $i=1,\cdots,n$.

15. **סכום רימן המתאים לחלוקה**

תהי f פונקציה מוגדרת בקטע סגור $[a,b]$. עבור חלוקה מנוקדת $P: a=x_0<\xi_1<x_1<\cdots<x_n=b$, נגדיר את סכום רימן המתאים ל - P:

$$\sigma(P)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\Delta x_i$$

16. **נורמה של חלוקה**

תהי f פונקציה מוגדרת בקטע סגור $[a,b]$. הנורמה של החלוקה P מוגדרת:

$$\lambda(P)\coloneqq\max(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)$$

האורך המקסימלי של קטע בחלוקה (נקרא גם הפרמטר של P)

17. **האינטגרל המסויים**

תהי f פונקציה מוגדרת בקטע סגור $[a,b]$.

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(P)=I$$

(לא פורמלי: $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i$)

פירושו: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה מנוקדת P עם $\lambda(P)<\delta$ מתקיים $|\sigma(P)-I|<\varepsilon$. בלשון הסדרות: לכל סדרת חלוקות מנוקדות (P_n) כך ש - $\lambda(P_n)\to 0$

מתקיים $\sigma(P_n)\to I$.

כאשר הגבול I הנ"ל קיים, נאמר ש -

$$\int_a^b f(x)dx=I$$

ונקרא ל – I האינטגרל המסוים של f בקטע $[a,b]$.

18. **פונקציה אינטגרבילית לפי רימן**

תהי f פונקציה מוגדרת בקטע סגור $[a,b]$. כאשר $\int_a^b f(x)dx$ קיים, אומרים שהפונקציה f אינטגרבילית לפי רימן בקטע $[a,b]$.

19. **<u>סכום עליון ותחתון לפי דרבו</u>**

תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$.

תהי $P \coloneqq a = x_0 < \cdots < x_k = b$ חלוקה של $[a,b]$.

נגדיר לכל $1 \le i \le k$: $\alpha_i \coloneqq \inf\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ ו -

$\beta_i \coloneqq \sup\{f(x): x \in [a,b]\}$.

נגדיר :

$$\boxed{\bar{s}(P) \coloneqq \sum_{i=i}^{k} \Delta_i \cdot \beta_i}$$

$$\boxed{\underline{s}(P) \coloneqq \sum_{i=i}^{k} \Delta_i \cdot \alpha_i}$$

20. **<u>עידון של חלוקה</u>**

חלוקה P_1 של $[a,b]$ היא עידון של חלוקה P_2 של $[a,b]$ אם $P_2 \subseteq P_1$.

21. **<u>האינטגרל התחתון והעליון של דרבו</u>**

בהמשך לסימונים הנ"ל, נגדיר :

$$\boxed{\underline{I} \coloneqq \inf\{\underline{s}(P)\}}$$

$$\boxed{\bar{I} \coloneqq \sup\{\bar{s}(P)\}}$$

$\underline{I} =$ האינטגרל התחתון של דרבו.

$\bar{I} =$ האינטגרל העליון של דרבו.

22. **<u>כיסוי פתוח של קבוצה ממשית</u>**

כיסוי פתוח של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ הוא אוסף קטעים $\{(a_\alpha, b_\alpha): \alpha \in I\}$ שאיחודם מכיל את A :

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$$

23. **תת כיסוי סופי של כיסוי פתוח של קבוצה ממשית**

תת כיסוי סופי של כיסוי פתוח של $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{(a_\alpha, b_\alpha) : \alpha \in I\}$, הוא מספר סופי של קטעים מהכיסוי המכסה את A, כלומר קטעים $\left(a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}\right), \cdots, \left(a_{\alpha_k}, b_{\alpha_k}\right)$, עבור $k \in \mathbb{N}$ ו - $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ כך ש:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \left(a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}\right)$$

24. **קבוצה אפסית**

קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ היא אפסית (או ממידה אפס) אם לכל $\varepsilon > 0$, יש כיסוי פתוח סופי או בן מניה:

$$A \subseteq \bigcup_{n} (a_n, b_n)$$

ע"י קטעים שסכום אורכיהם קטן ε. כלומר:

$$\sum_{n} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

25. **כמעט בכל הקטע**

נאמר שתכונה מסוימת מתקיימת כמעט בכל הקטע $[a, b]$ אם קבוצת הנקודות בקטע שאין להן תכונה זאת זו אפסית.

□