תרגיל 1 אנליזה הרמונית תשע"ט

להגשה בשבוע שמתחיל בכ"ו חשוון 4.12

1. בדקו האם הפונקציות הבאות מקיימות את תכונות הליניאריות, ההרמיטיות והאי-שליליות; האם הן מהוות מכפלה פנימית מעל המרחב V?

   (א) $V=M_n(\mathbb{R})$ (מטריצות מגודל $n\times n$ מעל השדה $\mathbb{R}$), $\langle A,B\rangle = tr(AB)$.

   (ב) $V=M_n(\mathbb{R})$, $\langle A,B\rangle = tr(AB^t)$.

   (ג) $C^1[0,1]$ (מרחב הפונקציות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ שהן גזירות ברציפות), עם הפונקציה $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f'(x)\,g'(x)\,dx$.

   (ד) $C^1[0,1]$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,e^x dx$.

2. יהיו $x_1,\dots,x_n$ ממשיים, הוכיחו שמתקיים:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}{\sqrt{n}} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

הדרכה: התבוננו בוקטורים: $u=(|x_1|,\dots,|x_n|)\,,\ v=(1,\dots,1)$ והשתמשו באי-שוויון קושי שוורץ (במכפלה הפנימית הסטנדרטית).

3. הוכיחו את הזהויות הבאות במרחב מכפלה פנימית, כאשר הנורמה היא זו המושרית מהמכפלה הפנימית (המכפלה הפנימית היא הסטנדרטית):

   (א) מעל $\mathbb{R}$: $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)$.

   (ב) מעל $\mathbb{C}$: $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\,\|u+vi\|^2-i\,\|u-vi\|^2\right)$.