83־116 מתמטיקה בדידה 1, מרצה: דר' ריטה סולומיאק
מבחן מועד א', תשע"ז

- ענו על כל השאלות
- הקפידו על סדר ונקיון
- משך המבחן שלוש שעות וחצי
- ללא חומר עזר, גם לא מחשבון
- השאלות לא מסודרות לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות
- מבנה המבחן וניקוד: במבחן 6 שאלות 20 נקודות לכל שאלה = 120 נקודות בסה"כ

חלקו את זמנכם בתבונה! בהצלחה!

1. א (8 נקודות). יהיו $P(x,y)$ ו־$Q(x,y)$ פרדיקטים. שללו את הפסוק:

$$\forall x\ \exists y\ P(x,y) \longrightarrow \forall y\ \exists x\ Q(x,y)$$

ב (3 נקודות). נסמן ב־$P(X)$ קבוצת החזקה של קבוצה X
תהא $A=\{1,2,3\}$. רישמו שלושה איברים שונים של קבוצה $P(P(A))$.

ג (9 נקודות). אילו מהטענות נכונות? נמקו.

(i) $\emptyset \in P(P(A))$

(ii) $\{\emptyset\} \in P(P(A))$

(iii) $\{\emptyset\} \subseteq P(P(A))$

2. יהיו A, B תתי־קבוצות של קבוצה אוניברסלית U.
הוכיחו:

$$(A \triangle B)^c \setminus B = (A \cup B)^c$$

3. הוכיחו:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

4. א (10 נקודות). האם קיימת קבוצה **סופית** A סדורה חלקית כך שב־A יש בדיוק שלושה איברים מקסימליים ואיבר אחד מינימלי? הביאו דוגמה של קבוצה כזו או נמקו שקבוצה כזו לא קיימת.

ב (10 נקודות). תהא $A=\{a,b,c\}$. יהי R יחס מעל A:

$$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(c,a)\}$$

האם R הוא יחס סדר חלקי? נמקו.

5. א (10 נקודות). נניח כי פונקציות $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ מקיימות:

$$\forall n\in\mathbf{N}\qquad f(n)=g(n+5).$$

הוכיחו: אם f על, אז g לא חד־חד ערכית.

ב (10 נקודות). יהיה R יחס כלשהו מעל קבוצה A. נגדיר יחס S מעל A על ידי

$$S=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n.$$

הוכיחו כי S טרנזיטיבי.

רמז: $R^m\circ R^n=R^{m+n}$.

6. א (8 נקודות). הוכיחו כי אם S,R הם יחסי שקילות מעל קבוצה A, אז $R\cap S$ הוא יחס שקילות.

ב (12 נקודות).

(i) נגדיר יחס R מעל $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\setminus\{(0,0)\}$ כך:

$$(x_1,y_1)\,R\,(x_2,y_2)\iff x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2.$$

הוכיחו כי R הוא יחס שקילות ומצאו מחלקת שקילות של $(0,1)$ ביחס ל־R.

(ii) נגדיר יחס S מעל $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\setminus\{(0,0)\}$ כך:

$$(x_1,y_1)\,S\,(x_2,y_2)\iff x_1=x_2.$$

הוכיחו כי S הוא יחס שקילות ומצאו מחלקת שקילות של $(0,1)$ ביחס ל־S.

(iii) מסעיף א) נובע כי $R\cap S$ הוא יחס שקילות. מצאו את מחלקת שקילות של $(0,1)$ ביחס ל־$R\cap S$.