מיון חבורות אבליות

משפט

אם G איזומורפית למכפלה חיצונית $H\times K$ עבור איזשהן חבורות H ו-K אז קיימות תת-חבורות $\tilde{H},\tilde{K}\lhd G$ כך ש-G היא מכפלה פנימית ישרה של $\tilde{H}$ ו-$\tilde{K}$ וגם $\tilde{H}\cong H$, $\tilde{K}\cong K$.

משפט

תהי G חבורה אבלית סופית מסדר $\prod_{i=1}^{k}p_i^{r_i}$ כאשר p_i הם ראשוניים שונים, אזי $G\cong H_{p_1}\times H_{p_2}\times...\times H_{p_k}$ כאשר H_{p_i} זו התת-חבורה p_i-סילוא של G. הפירוק יחיד עד כדי סדר.

מסקנה

כל חבורה אבלית סופית איזומורפית למכפלת "חבורות-p" - חבורות שהסדר שלהן הוא חזקה של ראשוני.

משפט

כל חבורת p(הכוונה לחבורה G כך ש-$|G|=p^i$) היא איזומורפית למכפלת(=מכפלה חיצונית) חבורות ציקליות.

דוגמה

1. $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ - לא ציקלית.
2. $G=\mathbb{Z}_4$ - ציקלית.
3. S_3 היא לא איזומורפית למכפלת חבורות ציקליות. $|S_3|=6=2\cdot 3$ - לא חבורת p.

משפט("היסודי של חבורות אבליות סופיות")

כל חבורה אבלית סופית היא מכפלה ישרה של חבורות-p ציקליות, והפירוק יחיד.

הוכחה

מסקנה ממשפטים קודמים.

הערה

אם לא דורשים שהפירוק יהיה לחבורות-p ציקליות אלא לציקליות בלבד, אז הפירוק אינו יחיד.

דוגמה $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

תרגיל

מיינו את כל החבורות האבליות מגודל 50

פתרון

$50 = 2 \cdot 5^2$, אזי יש תת-חבורה 2-סילוא מסדר 2 וישנה תת חבורה 5-סילוא מסדר 25.
נסמן את החבורה בG. $|G| = 50$. ידוע כי $G \cong H_2 \times H_5$ כאשר H_2 היא 2-סילוא וH_5 היא 5-סילוא.
עכשיו, $H_2 \cong \mathbb{Z}_2$ כי $|H_2| = 2$.
$|H_5| = 25$ וגם H_5 מתפרקת למכפלת חבורות-5 ציקליות, ולכן ישנן שתי אופציות:

1. H_5 ציקלית, ואז $H_5 \cong \mathbb{Z}_{25}$
2. H_5 היא לא ציקלית, אז $H_5 \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

לכן G היא או $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$ או $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

תרגיל

מיינו את החבורות האבליות מסדר 40.

תשובה

$40 = 2^3 \cdot 5$. נסמן G כחבורה מגודל 40, אזי $G \cong H_2 \times H_5$ כאשר $|H_2| = 8, |H_5| = 5$
$|H_5| = 5 \Leftarrow H_5 \cong \mathbb{Z}_5$

עובדה אם חבורה היא מסדר p ראשוני אזי היא ציקלית, ובפרט איזומורפית ל$\mathbb{Z}_p$]

$|H_8| = 8$. האופציות:

1. $H_2 \cong \mathbb{Z}_8$(ציקלית)
2. $H_2 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$(לא ציקלית)
3. $H_3 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$(לא ציקלית)

סה"כ האופציות הן:

1. $G \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_8$

2. $G\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$
3. $G\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

מעריך/אספוננט

הגדרה

G חבורה. המעריך\אקספוננט של G מוגדר להיות $\exp\left(G\right)=\mathrm{lcm}\left\{ o\left(g\right):g\in G\right\}$.

דוגמאות

1. $\exp\left(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right)=2$
2. $\exp\left(S_3\right)=6$
3. $\exp\left(S_3\right)=\mathrm{lcm}\left(1,2,3\right)=6$

הערה

ניתן להגדיר רק בחבורת אבליות את האקספוננטה בתור: $\exp\left(G\right)=\max\left\{ o\left(g\right):g\in G\right\}$, אך זה לא נכון לחבורות לא אבליות.

הערה

$\exp\left(G\right)=d$ הוא המספר הקטן ביותר כך ש$g^d=e$ לכל $g\in G$.

מסקנה

$\exp\left(G\right)\mid\left|G\right|$

תרגיל בית

$$\exp\left(G\times H\right)=\mathrm{lcm}\left(\exp\left(G\right),\exp\left(H\right)\right)$$

דוגמה

$$\exp\left(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right)=\mathrm{lcm}\left(\exp\left(\mathbb{Z}_2\right),\exp\left(\mathbb{Z}_2\right)\right)=\mathrm{lcm}\left(2,2\right)=2$$

תרגיל

אם G ציקלית אזי $\exp\left(G\right)=\left|G\right|$.

הוכחה

ידוע ש$|G|$ | $\exp(G)$.

$$\exp(G)=\operatorname{lcm}\{o(g):g\in G\}$$

מכיוון שG ציקלית קיים g_0 כך ש$|G|=o(g_0)$.

$$|G|=o(g_0)\mid\exp(G)$$

$$\Downarrow$$

$$|G|=\exp(G)$$

תרגיל

הוכח או הפרך: אם $|G|=\exp(G)$ אזי G ציקלית.

תשובה

לא. קחו לדוגמה $G=S_3$.

תרגיל

אם G חבורת-p אזי G היא ציקלית אם ורק אם $|G|=\exp(G)$

פתרון

($\Leftarrow$) כבר עשינו

($\Rightarrow$) $\exp(G)=\max\{o(g):g\in G\}$. אז לכל $g\in G$, $o(g)\mid|G|$. אם מסמנים $|G|=p^d$ אזי $o(g)\mid p^d \Leftarrow o(g)=p^k$ כאשר $k\le d$. מכאן ש

$$\exp(G)=\max\left\{p^k:\exists_{g\in G}o(g)=p^k\right\}$$

ואם $\exp(G)=|G|=p^d$ אז זה אומר שקיים $g_0\in G$ כך ש= $o(g_0)=p^d$ $|G|\Leftarrow G=\langle g_0\rangle\Leftarrow G$ ציקלית.

תרגיל

אם G חבורה לא אבלית מסדר 8 אזי $\exp(G)=4$

פתרון

כל איבר הוא מסדר 1, 2, 4, או 8.

- אם $\exp(G) = 8$ אזי G ציקלית $\Leftarrow$ אבלית.
- אם $\exp(G) = 2$ אז כל האיברים הם מסדר 2, ולכן G אבלית.
- $\exp(G) \neq 1$ משום שG מכילה עוד איברים פרט לאיבר היחידה.

משפט

אם $H \cong G$ אזי $\exp(G) = \exp(H)$

תרגיל

הראו ש$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \ncong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

פתרון

$$\exp(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) = \operatorname{lcm}(\exp(\mathbb{Z}_5), \exp(\mathbb{Z}_4), \exp(\mathbb{Z}_2)) = 20$$

$$\exp(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \operatorname{lcm}(\exp(\mathbb{Z}_5), \exp(\mathbb{Z}_2)) = 10$$