

מבחן מועד מיוחד בקורס 88-218 תשפ"א

תורת החבורות

מרצים: בארי גרינפלד ותומר באואר
מתרגלת: תמר בר-און

הוראות

1. **משך המבחן** הוא שעתיים, ועוד עשר דקות לסריקה והעלאה של התשובות.
2. **הניקוד** הסופי של השאלות יהיה 35, 30, 25 ו-10 נקודות מן התשובה הטובה ביותר שלכם לפחות טובה.
3. **חומר העזר** הוא לכל היותר שני דפים של טקסט כתוב או מודפס שאתם הכנתם מראש. כלומר אין להשתמש בטלפון, במחשבון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר. הציגו למשגיחים את כל חומר העזר שלכם לפני תחילת המבחן.
4. כתבו את הפתרון לכל שאלה **בדף נפרד** ונמקו אותו היטב.
5. כתבו בעט כחול או שחור באופן ברור.
6. **אין להשתמש במחשב** במהלך המבחן (פרט לצפייה בטופס ולהגשת הפתרון). מהלך **המבחן יוקלט** בתוכנת זום. יש לכוון לפחות מצלמה אחת כך שבשדה הראייה של המצלמות רואים את הדפים שלכם, הפנים והידיים שלכם. שימו לב שהמבחן מוקלט ונקפיד על שמירה על טוהר הבחינות.
7. בשאלות שבהן התשובה הסופית היא מספר או נוסחה סגורה אין להשתמש עבודה בסימן הסכום \sum , סימן המכפלה \prod או שלוש נקודות.
8. מותר לצטט ללא הוכחה כל טענה שהוכחנו בהרצאה. החומר למבחן הוא בחיתוך החומר של שתי קבוצות ההרצאה.

עצות בכתובה הנה כמה נקודות שכדאי לדעת כאשר אתם עונים על המבחן:

1. ניתן לפתור את המבחן ללא שום דף נוסחאות.
2. בכתבת פתרון אתם צריכים להעביר את הידע שלכם מן הראש אל הדף. זה לא מספיק לדעת או להבין מה צריך להיות הפתרון לשאלות, אלא גם לתקשר את הידע וההבנה האלו.
3. חלקו את זמנכם בתבונה. נסו לעבור על כל השאלות ולכתוב טיוטה מהירה לרעיון הראשוני של דרך הפתרון, ואז כתבו פתרון מלא לשאלות שאתם יודעים לענות עליהן.
4. אנחנו לא קוראי מחשבות, ולכן אתם צריכים לכתוב את מה שאתם רוצים שנדע, ורק את מה שרלוונטי לפתרון. כתבו בכתב מסודר, עם משפטים מלאים ועם נימוקים והסברים לכל מה שדרוש נימוק או הסבר. כאשר משתמשים בביטויים כמו "קל לראות...", "ברור ש...", "מסיקים מייד כי...", אז צריך להוכיח את הדברים האלו. זה הרי צריך להיות קל, ברור ומייד.
5. לשאלה מסויימת יכולים להיות כמה פתרונות נכונים שונים. מצד שני, יכולים להיות לה גם הרבה פתרונות שגויים שונים. לפעמים אחד מהפתרונות הנכונים הוא יותר פשוט, או יותר קצר, או דומה למה שראינו בכיתה מאשר שאר הפתרונות. זה בסדר גמור לענות עם פתרון אחר, ובכל מקרה צריך להראות שהוא נכון ולא שגוי.

שאלות

שאלה 1. מצאו איבר מהסדר הגדול ביותר האפשרי בחבורה $\mathbb{Z}_2 \times A_5 \times S_7$.

שאלה 2. נתבונן בכל החבורות הלא אבליות מסדר $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. האם כולן פתירות? האם כולן לא פתירות? האם חלק כן וחלק לא? הוכיחו את קביעתכם.

שאלה 3. תהי G חבורה מסדר $27 = 3^3$. אין קשר בין הסעיפים.

א. (5 נק') הוכיחו כי $G \times G$ פועלת באופן נאמן על קבוצה בגודל $54 = 2 \cdot 27$.

ב. (20 נק') הוכיחו שאם G פועלת באופן נאמן על קבוצה מגודל 11, אז היא פועלת באופן נאמן גם על קבוצה מגודל 9.

שאלה 4. תהי G חבורה. נתבונן בפעולה של חבורת האוטומורפיזמים שלה $\text{Aut}(G)$ על G המוגדרת לפי זה שלכל $\varphi \in \text{Aut}(G)$ ולכל $x \in G$ הפעולה היא $\varphi * x := \varphi(x)$.

א. (5 נק') נניח כי $G = \mathbb{Z}$. הוכיחו כי מספר המסלולים של הפעולה לעיל הוא אינסופי.

ב. (10 נק') יהי p ראשוני, ונניח כי $G = \mathbb{Z}_p$. מצאו את מספר המסלולים של הפעולה לעיל.

ג. (10 נק') יהיו p, q ראשוניים שונים, ונניח כי $G = \mathbb{Z}_{pq}$. מצאו את מספר המסלולים של הפעולה לעיל.

בהצלחה!