

$$(\Box(p \rightarrow q)) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

כלומר אם תמיד p גורר q , אז זה אומר שאם תמיד p , מתקיים גם שתמיד q . האם המשפט הזה נכון סינטקטי? כלומר, האם הוא נכון עבור כל עולם בכל מודל? האם

$$M_w \models \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

נוכיח ע"י פיתוח:

$$w \models \Box(p \rightarrow q) \implies \forall w': wRw' M_{w'} \models p \rightarrow q$$

$$M_w \models \Box p \implies \forall w': wRw' M_{w'} \models p$$

כלומר לכל wRw' מתקיים:

$$\left\{ \begin{array}{l} w \models \Box(p \rightarrow q) \\ w \models \Box p \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} M_{w'} \models p \rightarrow q \\ M_{w'} \models p \end{array} \right\} \implies M_{w'} \models q$$

ולכן $M_w \models \Box q$.

$K(p \wedge \neg p)$ - מתי זה מתקיים? לכאורה זו סתירה (כי $p \wedge \neg p$ תמיד שקר), אבל בעולם w שלא מכיר שום עולם אחר זה מתקיים. ואז:

$$\forall w': wRw' M_{w'} \models p \wedge \neg p$$

כדי למנוע מצבים כאלה, נרצה תכונה שנקראת "סיריאליות":

סיריאליות

כל עולם מכיר לפחות עולם אחר:

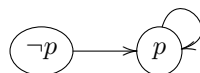
$$\forall w \exists w' wRw'$$

רפלקסיביות

מקרה פרטי של סיריאליות:

$$\forall w wRw$$

נסתכל על האקסיומה $Kp \rightarrow p$. האם אפשר לתת דוגמה לעולם שבו זה לא מתקיים? כן - אם הוא לא רפלקסיבי:



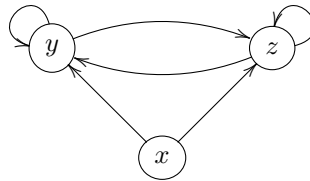
טרנזיטיביות

$$\begin{array}{l} xRy \\ yRz \end{array} \implies xRz$$

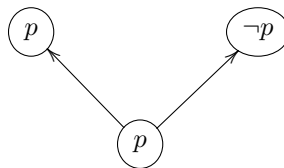
אוקלידיות

$$\begin{array}{l} xRy \\ xRz \end{array} \implies yRz$$

למשל:



נשים לב שסיריאליות רפלקסיביות, טרנזיטיביות ואוקלידיות הן לא תכונות שחייבות להתקיים בכל מודל. התכונות קובעות איזה אקסיומות יתקמו. למשל האקסיומה $\Box \phi \rightarrow \phi$ לא מתקיימת במודל לא אוקלידי כמו:



Closed World Assumption

אם

$$KB = \begin{cases} \forall x \text{Bird}(x) \rightarrow \text{Fly}(x) \\ \text{Bird}(\text{Tweety}) \end{cases}$$

לפי כל מערכת לוגית שאיננו עד עתה, מתקיים גם $\text{Fly}(\text{Tweety})$, ושום מידע שנוסיף לא ישנה את זה. אבל במציאות זה לא נכון - למשל יכול להיות שהציפור פצועה ולא יכולה לעוף. אנשים מאמינים בדברים ועובדים לפי האמונה שלהם, אבל יכולה להתווסף עובדה ולשנות את האמונה הזו. לוגיקה קלאסית לא מאפשרת את זה - היא מונוטונית. אבל הלוגיקה שאנשים עובדים איתה במציאות היא לא מונוטונית, ולכן נצטרך Closed World Assumption, אז יכול להתקיים:

$$KB \vdash_{CWA} p$$

$$\{a\} \cup KB \not\vdash_{CWA} p$$

נשים לב שבכל לוגיקה יכול להיות שמתקיים $KB \vdash p$ - כלומר שהסרת עובדות גורמת לכך שלא נוכל להוכיח משהו שיכולנו להוכיח קודם - אבל צריך Closed World Assumption בשביל שהוספת עובדות תגרום לכך שלא נוכל להוכיח דברים שיכולנו להוכיח קודם. בלוגיקה מונוטונית צריך הרבה עובדות בשביל להוכיח דברים:

$$\neg \text{Wounded}(x) \wedge \neg \text{Kiwi}(x) \wedge \neg \text{Ostrich}(x) \wedge \text{Alive}(x) \wedge \dots \wedge \text{Bird}(x) \rightarrow \text{Fly}(x)$$

האם אפשר לתת סמנטיקה ל-Closed World Assumption?
אחת הסמנטיקות נקראת Minimal Model Semantics. נסתכל על המודל:



נתעניין בשאלה - מה העולם המינימלי שמספק Knowledge Base מסויים? למשל $KB = \{p \vee q\}$:



העולם $\{ \}$ לא מספק והעולם $\{p, q\}$ לא מינימלי.
כעת נרצה לדעת - מה נכון בכל העולמות האלה?

• p לא נכון - הוא לא נכון בעולם $\{q\}$

• $\neg q \rightarrow p$ נכון - ב $\{p\}$ כי שני הצדדים נכונים וב $\{q\}$ כי p לא נכון.