

תרגיל בית 2 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1. בכל סעיף, קבעו והוכיחו האם תת-הקבוצה הנתונה היא תת-חבורה:

א. $9\mathbb{Z}_{12} = \{9k \mid k \in \mathbb{Z}_{12}\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$.

ב. $\{10^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}^*$. תזכורת: הפעולה היא כפל.

ג. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\} \subseteq GL_3(\mathbb{Z}_p)$. תזכורת: $GL_3(\mathbb{Z}_p)$ היא חבורת המטריצות ההפיכות בגודל 3×3 מעל השדה \mathbb{Z}_p , עם הפעולה של כפל מטריצות.

ד. $\{a + b\sqrt{6} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \vee b \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^*$.

ה. $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\} \subseteq M_n(\mathbb{R})$.

ו. $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) < 1, \text{ הפיכה } f\} \subseteq \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{ הפיכה } f\}$.

ז. $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(2) = 2, \text{ הפיכה } f\} \subseteq \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{ הפיכה } f\}$.

(בשני הסעיפים האחרונים הפעולה היא הרכבת פונקציות).

שאלה 2. יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$. הוכיחו כי $m\mathbb{Z} \leq n\mathbb{Z}$ אם ורק אם $n \mid m$.

שאלה 3. תהינה $(G, *)$ ו- (H, \bullet) חבורות ותהיינה G', H' תת-חבורות של G, H בהתאמה. הוכיחו או הפריכו: $G' \times H'$ היא תת-חבורה של $G \times H$ (ביחס לפעולה רכיב-רכיב).

שאלה 4. תהי G חבורה, ויהיו $H, K \leq G$ תת-חבורות של G . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $H \cup K$ היא תת-חבורה של G .

ב. $H \cap K$ היא תת-חבורה של G .

ג. $\Delta_H = \{(h, h) \mid h \in H\}$ היא תת-חבורה של $G \times G$.

שאלה 5. תהי G חבורה, ויהיו $a, b \in G$.

א. הוכיחו $o(ab) = o(ba)$. זהירות: לא הנחנו שהחבורה אבלית או שהסדרים סופיים.

ב. הפריכו שאם $o(a), o(b) < \infty$, אזי $o(ab) < \infty$ או $o(ab) = o(a)o(b)$.

שאלה 6 (אתגר). מצאו חבורה אינסופית שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים בה איבר מסדר n . האם אתם יכולים גם להבטיח שהסדר של כל האיברים הוא סופי? כמו כן, לכל $m > 1$ מצאו חבורה אינסופית G_m שהסדר של כל איבר בה הוא לכל היותר m .

האם אתם יכולים למצוא דוגמאות לשאלות האלו כך שהחבורות הן מעוצמה \aleph_0 ?

בהצלחה!