<u>שימור E:</u> • H הוא בדיוק האנרגיה של m. [במקרה שלנו]

- אם H הוא בלתי תלוי בזמן אז H הוא גם נשמר לרוב זה ה- E אבל לא תמיד.

• הקואורדינטה θ לא מופיעה ב- H ז.א. θ היא קואורדינטה ציקלית לכן התנע המוכלל $p_\theta = const$.

<u>משוואות התנועה:</u>

$$\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

- זה פשוט תנע מוכלל

<u>ומכאן:</u>

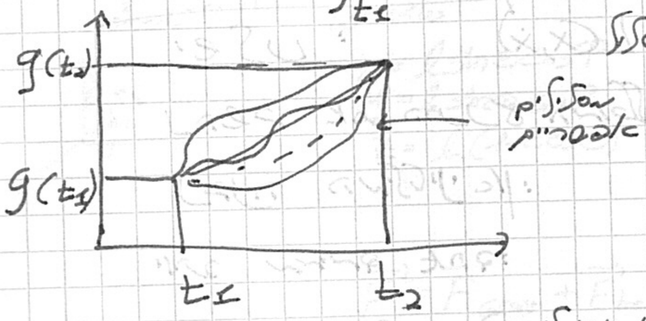
$$\dot p_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot p_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \rightarrow p_\theta = const$$

$$p_\theta = J \qquad \dot p_r = \underbrace{m\ddot r = \frac{J^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}}_{\text{אלו משוואות התנועה. מכאן....}}$$

<u>הרצאה 12:</u> <u>תכונות פעולה ופעולה מינימלית:</u>

<u>הגדרה:</u> $I := \int_{t_1}^{t_2} L(q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n,t)\,dt$



בואו נחשב את הפעולה המסלול כך שיהיה מסלול כך שתהיה פעולה מינימלית.

כך שלפי תורת הווריאציות

$\delta I = 0 \Leftarrow$ פעולה מינימלית.

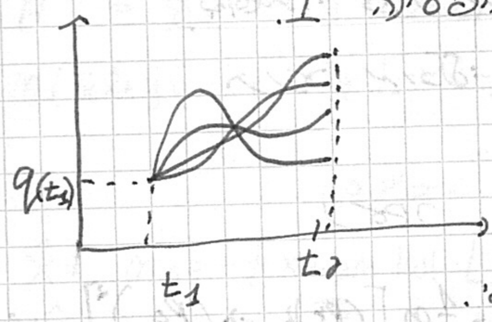
קיבלנו בשיעורים הראשונים: $\forall_i \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

בואו נגדיר וריאציה שונה של הפעולה I.

הפעם שמשתנה במסלולים (שמקיימים את אוילר לגרנז' הם ה $q(t_2)$).

כלומר הוריאציה היא ב $q(t_2)$.

המשתנה הוא עם המיקום הסופי.



$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2} L(q_1+\delta q_1,\dots,q_n+\delta q_n; \dot q_1+\delta\dot q_1,\dots,\dot q_n+\delta\dot q_n;t)\,dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2} L(q_1,\dots,q_n;\dot q_1,\dots,\dot q_n;t)$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\Big[L(q_1+\delta q_1,\dots,q_n+\delta q_n;\dot q_1+\delta\dot q_1,\dots,\dot q_n+\delta\dot q_n;t)$$
$$-L(q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n;t)\Big]dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot q+\delta\dot q,t)-L(q,\dot q,t)\big]dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta\dot q\right]dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\dot q}\frac{d}{dt}\delta q\right]dt$$

$$\delta\dot q=\frac{d}{dt}\delta q$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q\right]dt+\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)\delta q\,dt$$
$$\delta I=\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot q(t_2)}\delta q(t_2)-\frac{\partial L}{\partial\dot q(t_1)}\delta q(t_2)}_{}+\int_{t_1}^{t_2}\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)\right]}_{0}\delta q\,dt$$

[מקיים משוואות אוילר לגרנג'] 0

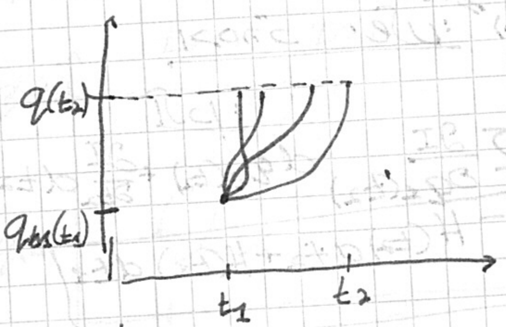
$[\delta q(t_1)=0]$ 0

כלומר

$$\delta I=\frac{\partial L}{\partial\dot q(t_2)}\delta q(t_2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot q(t_2)}=p(t_2)$$
$$\delta I=p(t_2)\,\delta q(t_2)$$

ובאופן כללי יותר:

$$\delta I=\sum_i p_i(t_2)\,\delta q_i(t_2)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial I}{\partial q_i(t_2)}=p_i(t_2)$$



כאשר רק t_2 ישתנה. אך $q(t_2)$ ישאר קבוע [בנוסף ל t_1 ו $q(t_1)$].

$$I=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt$$
$$\frac{dI}{dt_2}=\frac{\partial I}{\partial t_2}+\sum_i\frac{\partial I}{\partial q_i(t_2)}\frac{dq_i(t_2)}{dt_2}$$

בואו נסמן ב I פונקציה קדומה של L

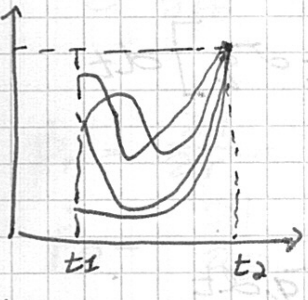
$$I = \tilde{L}(t_2) - \tilde{L}(t_1)$$

$$\frac{dI}{dt_2} = \frac{d}{dt_2}\tilde{L}(t_2) - \frac{d}{dt_2}\tilde{L}(t_1) = \frac{d}{dt}\tilde{L}(t_2) = L(t_2)$$

$$L(t_2) = \frac{\partial I}{\partial t_2} + \sum_i p_i(t_2)\dot{q}_i(t_2)$$

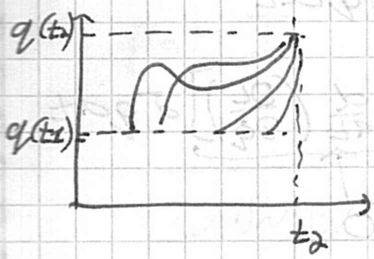
$$-\left(\sum_i p_i(t_2)\, q_i(t_2) - L(t_2)\right) = \frac{\partial I}{\partial t_2}$$

$$-H(t_2) = \frac{\partial I}{\partial t_2}$$



עכשיו נשחק עם $q_i(t_1)$:

ונקבל את $\frac{\partial I}{\partial q_i(t_1)}$



וכעת נשחק עם t_1

ונקבל את $\frac{\partial I}{\partial t_1}$

אם נסתכל שנייה על משהו:

ש"ה ל-0

במקרה הראשון:

$$\delta I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t_2)}\delta q_i(t_2) - \frac{\partial L}{\partial q(t_2)}\delta q(t_1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial q_1} = -p_i(t_1)$$

ובמקרה השני:

$$\frac{dI}{dt_1} = -L(t_1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t_1} = H(t_1)$$

ובסה"כ ישנו:

$$\frac{\partial I}{\partial t_1} = H(t_1);\ \frac{\partial I}{\partial t_2} = -H(t_2);\ \frac{\partial I}{\partial q_i(t_1)} = -p_i(t_1);\ \frac{\partial I}{\partial q_i(t_2)} = p_i(t_2)$$

לכן:

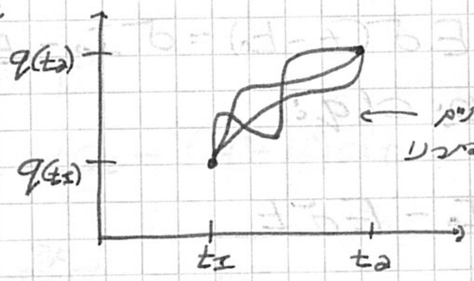
$$dI = \sum_i \frac{\partial I}{\partial q_i(t_1)} dq_1(t_1) + \frac{\partial I}{\partial t_1}dt_1 + \sum_i \frac{\partial I}{\partial q_i(t_2)} dq_i(t_2) + \frac{\partial I}{\partial t_2}dt_2$$

$$\boxed{dI = \sum_i p_i(t_2)dq_i(t_2) - \sum_i p_i(t_1)dq_i(t_1) - H(t_2)dt_2 + H(t_1)dt_1}$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i dq_i - H dt$$

אז: נוכל מכאן לקבל את משוואות המילטון.

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i p_i\,dq_i - H\,dt$$



כל המסלולים שהם לא האמיתיים

[זה חיבר לבעיה שפתרנו בתחילת הקורס].

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i p_i\,dq_i - H\,dt$$

עבור איזה מסלול $\delta I=0$.

[יש לשים לב שיש שינוי בתנאים שמשמשים והאיזה].

$$\delta I=\int\delta\Big(\sum_i p_i\,dq_i - H\,dt\Big) = \int\Big[\delta p\,dq_i + p\,\delta dq_i - \frac{\partial H}{\partial q}\,dq\,dt - \frac{\partial H}{\partial p}\,\delta p\,dt\Big]$$

נפרק את הסכום שהטעמי הסוכם מקודם.

[זה נובע מ: $\delta H(p,q)=\frac{\partial H}{\partial p}\delta p+\frac{\partial H}{\partial q}\delta q$].

נשים לב ש: $\delta dq = d\delta q$

ולכן

$$\delta I=\int\delta p\,dq + p\,d\delta q - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q\,dt - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\,dt$$

$$0 = p\,\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\delta p\Big(\frac{dq}{dt}-\frac{\partial H}{\partial p}\Big)dt \cancel{+\int\delta p\Big(\frac{dq}{dt}-\frac{\partial H}{\partial p}\Big)dt} - \int\delta q\Big(\frac{dp}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q}\Big)dt$$

שווה לאפס אין וריאציה ב-t_1 ו-t_2.

$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$

או יותר נכון:

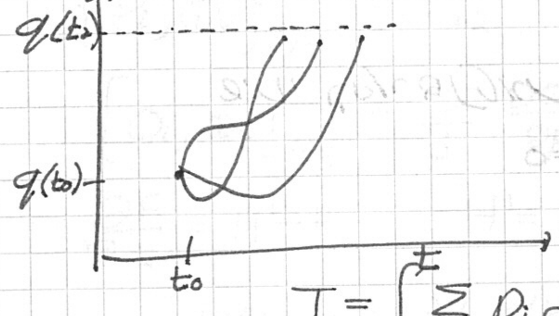
$$\frac{dq}{dt}-\frac{\partial H}{\partial p}=0 \;;\; \frac{dp}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q}=0$$

ולכן הגענו למשוואות המילטון

$$\boxed{\forall_i \quad \dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \;;\; \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q}}$$

והאיזציות כ"שאנרגיה נשמרת".

השינוי ב-t_2



ראינו ש:

$$dI=-H\,\delta t$$

$$H=E$$

$$\delta I=-E\,\delta t$$

ולכן

$$I=\int_{t_0}^{t}\sum_i p_i\,dq_i - E\,dt$$

$$I=\Big[\int_{t_0}^{t}\sum_i p_i\,dq_i\Big]-E(t-t_0)$$

ואנחנו מחפשים $\delta I = 0$.

$$\delta I = -E\,\delta t$$

$$\delta I = \delta I_0 - E\,\delta(t - t_0) = \delta I_0 - E\,\delta t$$

$$I_0 = \int_{t_0}^{t} \sum_i p_i\, dq_i$$

$$-E\,\delta t = \delta I_0 - E\,\delta t$$

$$\delta I_0 = 0$$

$$\delta\left[\int_{t_0}^{t} \sum_i p_i\, dq_i\right] = 0$$

עקרון פעולה מינימלית מצומצם   עקרון מפרטיו!!

הרצאה 22:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i\, dq_i - H\,dt$$

$\delta I = 0 \iff$ משוואות המילטון

טרנספורמציות קנוניות:

משתנים ישנים $\left| q_1, \ldots, q_n \,\middle|\, p_1, \ldots, p_n \right|$

משתנים חדשים $\left| Q_1, \ldots, Q_n \,\middle|\, P_1, \ldots, P_n \right|$

נאמר:

$$Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n, t)$$

$$P_i = P_i(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; t)$$

$$H \to H'(Q_1, \ldots Q_n; P_1, \ldots P_n; t)$$

ואני אדרוש שמשוואות המילטון עדיין יתקיימו:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad ; \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

שינוי קואורדינטות ~~החדשות~~ שתחתם זה מתקיים נקרא טרנס' קנונית.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i\, dq_i - H\,dt \qquad \delta I = 0$$

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i P_i\, dQ_i - H'\,dt$$

$$\delta I' = 0$$

$$\sum_i p_i\, dq_i - H\,dt = \sum_i P_i\, dQ_i - H'\,dt + dF$$