לינארית להנדסה- פתרון תרגיל 6

תרגיל 1.

1. נתון שהמטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מתקיים $A^2+5A+6I=0$ הוכיחו כי A הפיכה.
2. תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-A מאפסת את x^2+x כלומר $A^2+A=0$ האם A בהכרח אינה הפיכה?

פתרון.

1.
$$\begin{gathered} A^2+5A+6I=0 \\ \Downarrow \\ A^2+5A=-6I \\ \Downarrow \\ A(A+5I)=-6I \\ \Downarrow \\ A\left(-\tfrac{1}{6}A-\tfrac{5}{6}I\right)=I \end{gathered}$$
כלומר A הפיכה ומתקיים $A^{-1}=-\frac{1}{6}A-\frac{5}{6}I$

2. **לא נכון, ניקח את** $A=-I$ **ונקבל**
$$A^2+A=(-I)^2+(-I)=0$$

תרגיל 2. כתבו את המטריצה $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ וההופכית שלה (אם קיימת) כמכפלה של מטריצות אלמנטריות

פתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{E_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}{\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{E_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{\xrightarrow{-R_1 \rightarrow R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\-5&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{\xrightarrow{R_2-5R_1 \rightarrow R_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{E_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}}{\xrightarrow{R_3-3R_1 \rightarrow R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{E_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}}{\xrightarrow{R_3-\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{E_6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{10}&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{\xrightarrow{-\frac{1}{10}R_2 \rightarrow R_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{E_7=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}{\xrightarrow{2R_3 \rightarrow R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{E_8=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{1}{10}\\0&0&1\end{pmatrix}}{\xrightarrow{R_2+\frac{1}{10}R_3 \rightarrow R_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{E_9=\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{\xrightarrow{R_1-3R_2 \rightarrow R_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

מכאן ניתן להסיק ש-

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}E_7^{-1}E_8^{-1}E_9^{-1}$$

ו-

$$A^{-1}=E_9E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$$

תרגיל 3. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-A הפיכה. הוכח או הפרך:

1. למערכות $\begin{array}{rcl} ABx & = & 0 \\ Ax & = & 0 \end{array}$ אותם פתרונות.
2. למערכות $\begin{array}{rcl} BAx & = & 0 \\ A^{-1}x & = & 0 \end{array}$ אותם פתרונות.
3. לכל ווקטור $b\neq 0$ למערכות $\begin{array}{rcl} ABx & = & b \\ BAx & = & b \end{array}$ אותם פתרונות.

פתרון.

1. לא נכון, היות ו-A הפיכה למערכת $Ax=0$ יש רק את פתרון האפס בעוד של-$ABx=0$ יכולים להיות פתרונות נוספים. ניקח לדוגמא $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ פותר את המערכת $ABx=0$, אך אינו פותר את המערכת $Ax=0$
2. לא נכון, היות ו-A^{-1} הפיכה למערכת $A^{-1}x=0$ יש רק את פתרון האפס בעוד של-$BAx=0$ יכולים להיות פתרונות נוספים. ניקח לדוגמא $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A=A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ פותר את המערכת $BAx=0$, אך אינו פותר את המערכת $A^{-1}x=0$
3. לא נכון, ניקח $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז

$$BAx=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=b$$

בעוד ש-

$$ABx=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=b$$

תרגיל 4. הוכח או הפרך:

1. אם $A^2=0$ אז $A=0$
2. אם $A^2=I$ אז $A=I$

פתרון.

1. לא נכון, ניקח $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A$ אך $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. לא נכון, ניקח $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=A$ אך $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

תרגיל 5. תהיינה A ו-B מטיצות ריבועיות מאותו סדר, כך שמתקיים $A^3=I$ ו-$BA=A\left(A+I\right)$ הוכיחו שמתקיים

1. $A^{-1}=A^2$
2. $B=A+I$
3. $BABA=A^2B^2$

פתרון.

1.
$$A^3 = I \quad \Rightarrow \quad AA^2 = I$$

כלומר A הפיכה ומתקיים $A^{-1} = A^2$

2.
$$B = BAA^{-1} = A\left(A+I\right)A^{-1} = AAA^{-1} + AIA^{-1} = A + I$$

3.
$$BABA = \left(A\left(A+I\right)\right)^2 = \left(A^2 + A\right)^2 = A^4 + 2A^3 + A^2 = A^2\left(A+I\right)^2 = A^2B^2$$

שאלה 6. האם הקבוצות הבאות הן תתי מרחבים?

1. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ z^2 = x^2 + y^2 \right\}$ (נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתאר) הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^3$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?
2. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : x^2 + y^2 + z^2 \leq 36 \right\}$(נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתאר) הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^3$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?
3. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ : a_{12} = a_{21} = 0 \right\}$ הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?
4. האם $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : tr\left(A\right) = 0 \right\}$ הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^{n\times n}$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

1. לא תת מרחב, ניקח

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in V, \ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \in W$$

אך החיבור

$$u + v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$$

הצורה הזאת היא קונוס

2. לא תת מרחב, ניקח

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$$

אך עם נכפיל ב-6 נקבל

$$6u = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W$$

הצורה הזאת כדור (עם הפנים) בעל רדיוס 6

3. כן, הוא תת מרחב, יהיו $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ אז

$$u + \alpha v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha b_{11} & a_{12} + \alpha b_{12} \\ a_{21} + \alpha b_{21} & a_{22} + \alpha b_{22} \end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\begin{cases} a_{11} + \alpha b_{11} & = & 0 + \alpha 0 & = & 0 \\ a_{22} + \alpha b_{22} & = & 0 + \alpha 0 & = & 0 \end{cases}$$

לכן $A+\alpha B\in W$ ו-$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$

4. כן, הוא תת מרחב, יהיו $A,B\in W,\alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$tr\left(A+\alpha B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(\alpha B\right)=tr\left(A\right)+\alpha tr\left(B\right)=0+\alpha 0=0$$

ו-

$$\begin{pmatrix}0&\dots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0\end{pmatrix}\in W$$

כי

$$tr\begin{pmatrix}0&\dots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0\end{pmatrix}=0$$

תרגיל 7. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $u,v,w\in V$ בהינתן ש-u אינו וקטור ה-0, האם נכון לומר ש-

$$span\left(\{u\}\right)=span\left(\{u,v\}\right)\bigcap span\left(\{u,w\}\right)$$

פתרון.
לא נכון, יהיו $V=\mathbb{R}^2$ ו-$u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in V,\ v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in V,\ w=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\in V$ אז

$$\begin{aligned}span\left(\{u\}\right)&=\left\{\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}:a\in\mathbb{R}\right\}\\&\neq\\span\left(\{u,v\}\right)\bigcap span\left(\{u,w\}\right)&=\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

תרגיל 8. מה צריך להיות k כדי שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ תהיה תלוייה לינארית מעל $\mathbb{R}$?

פתרון.
נחפש k כך שלמערכת $\alpha\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\k\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ יהיה פתרון לא טריוואלי

$$\left(\begin{array}{ccc|c}k&0&0&0\\1&1&1&0\\1&k&1&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\k&0&0&0\\1&k&1&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-k&-k&0\\0&k-1&0&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&k-1&0&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-k+1&0\end{array}\right)$$

כאשר $k=1$ יש פתרון לא טריוואלי. במהלך הדירוג חילקנו ב-k לכן יש לבדוק מה קורה למטריצה עבור $k=0$ בשלב לפני החלקה

ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

וגם כאן יש פתרון לא טריוואלי. לסיכום, עבור $k = 0, 1$ הווקטורים תלויים לינארית.

תרגיל 9. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-3, ותהי

$$U = \{p(x) \in V \mid p(x) = x \cdot p'(x)\}$$

תת קבוצה של V. ($p'(x)$ היא הנגזרת של $p(x)$)

1. הוכיחו ש-U תת מרחב של V.
2. מצאו בסיס ומימד ל-U.

פתרון.

1.
- שייכות של ווקטור ה-0: יהי $0(x)$ פולינום ה-0 והוא מקיים $0(x) = x \cdot 0'(x)$ לכן $\{0(x)\} \in U$
- סגירות: יהי $p(x), q(x) \in U$ פולינומים מקיימים $p(x) = x \cdot p'(x),\ q(x) = x \cdot q'(x)$ ו-$\alpha \in \mathbb{R}$ אז

$$p(x) + \alpha q(x) = x \cdot p'(x) + \alpha x \cdot p'(x) = x \cdot (p'(x) + \alpha \cdot p'(x)) = x \cdot (p(x) + \alpha \cdot p(x))'$$

מכאן $p(x) + \alpha q(x) \in U$ ולכן U הוא תת מרחב של V

2.

$$\begin{aligned}
&U &=\\
&\left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a + bx + cx^2 + dx^3 = x \cdot \left(a + bx + cx^2 + dx^3\right)\right\} &=\\
&\left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a + bx + cx^2 + dx^3 = bx + 2cx^2 + 3dx^3\right\} &=\\
&\left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a = 0, c = 0, d = 0\right\} &=\\
&\{p(x) = bx :\ b \in \mathbb{R}\} &=\\
&Span\{x\}
\end{aligned}$$

המימד הוא 1

תרגיל 10. יהיו $U,\ W$ תתי מרחבים ווקטורים של V. יהיו $u, v, w \in V - \{0\}$ כך ש-

- $u \in U,\ u \notin W$
- $w \in W$
- $v \in W$ ו-v אינו כפולה סקלרית של w

הוכיחו ש-v אינו צירוף לינארי של u ו-w.

פתרון.
נניח בשלילה ש-v צירוף לינארי של u ו-w, כלומר קיימים $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ כך ש-$v = \alpha u + \beta w$, מכאן $\alpha u = v - \beta w$, נשים לב ש-$v, \beta w \in W$. ידוע ש-W סגור לחיבור וכפל בסקלר בשל היותו תת מרחב ווקטורי לכן

$$u = \frac{1}{\alpha}\alpha u = \frac{1}{\alpha}(v - \beta w) \in W$$

סתירה לכך ש-$u \notin W$

תרגיל 11.

1. יהי $V = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} | A = A^t\right\}$ האם קיימים 4 תתי מרחבים לא טריוויאלים V_1, V_2, V_3, V_4 של V כך ש-

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \subset V$$

? (הכלה חזקה)

2. יהי $V = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} | A = A^t\right\}$ האם קיימים 4 תתי מרחבים לא טריוויאלים V_1, V_2, V_3, V_4 של V כך ש-

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \subset V$$

?(הכלה חזקה) רמז: אם $W \subset V$ תת מרחב של V אז $dim(W) < dim(V)$

פתרון.

1. למעשה את המרחב V ניתן לרשום כ-

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & f\end{pmatrix}:\ a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}$$

שהוא מרחב בעל מימד 6 הנפרש על ידי

$$V=Span\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=A_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=A_2},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=A_3},\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=A_4},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{=A_5},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}_{=A_6}\right\}$$

אם ניקח

$$\begin{aligned}V_1&=Span\{A_1\}\\V_2&=Span\{A_1,A_2\}\\V_3&=Span\{A_1,A_2,A_3\}\\V_4&=Span\{A_1,A_2,A_3,A_4\}\end{aligned}$$

אז מתקיים

$$\{0\}\subset V_1\subset V_2\subset V_3\subset V_4\subset V$$

2. למעשה את המרחב V ניתן לרשום כ-

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}:\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

שהוא מרחב בעל מימד 3 הנפרש על ידי

$$V=Span\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{=A_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{=A_2},\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{=A_3}\right\}$$

כאמור כאן המימד 3 ולכן לא ניתן "לדחוס" שרשרת של 4 תתי מרחבים.

הוכחה פורמלית: נניח בשלילה שקיימים תתי מרחבים כאלו

$$\{0\}\subset V_1\subset V_2\subset V_3\subset V_4\subset V$$

לכן

$$0<dim\left(V_1\right)<dim\left(V_2\right)<dim\left(V_3\right)<dim\left(V_4\right)<3$$

אך הדבר לא יתכן היות ו-$dim\left(V_i\right)$ הוא מספר שלם.

בהצלחה!!