תרגיל 4- לינארית 2

1. נתונים הבסיסים ב $\mathbb{R}^3$:

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ונתונים הוקטורים ב $\mathbb{R}^3$: $d_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},d_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},d_3=\begin{pmatrix}6\\5\\0\end{pmatrix}$ (לפי בסיס סטנדרטי)

א. מצאו את $[d_1]_B,[d_2]_B,[d_3]_B$.

ב. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. מצאו את מטריצות המעבר $[I]_E^B,[I]_B^E$, את $[I]_E^C,[I]_C^E$ ואת $[I]_C^B,[I]_B^C$ (ללא הרבה עבודה...)

ג. הראו שמתקיים עבור d_3 : $[d_3]_B=[I]_B^E[d_3]_E$.

2. יהי V מ"ו ממימד n מעל שדה F, ויהי B בסיס של V. הוכיחו את הטענות:

א. $[v]_B=[w]_B$ אוו"א $v=w$.

ב. לכל $\vec{x}\in F^n$ יש $v\in V$ כך ש $[v]_B=\vec{x}$

3. נתונה ההע"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י : $T(x,y,z)=(x-y,y+2z,z+x)$.

א. בהינתן הבסיסים B משאלה 1 והבסיס הסטנדרטי E, מצאו את ההצגות המטריציות הבאות : $[T]_E^E,[T]_B^E,[T]_E^B$.

ב. נתון ש : $[v]_B=(1,1,2)$. מצאו את $[T(v)]_E$.

4. יהיו $F\ni\alpha_1,....,\alpha_n$. נגדיר העתקה ליניארית $T:F^n\to F^n$ בצורה הבאה :

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+....+\alpha_nx_n\\x_1\\x_2\\.\\.\\x_{n-1}\end{pmatrix}$$

א. הוכח כי T הפיכה $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\neq 0$.

ב. מצא את $[T]$ לפי הבסיס הסטנדרטי.

(רמז: זיכרו שהע"ל הפיכה אמ"מ הדטרמיננטה ששונה מ 0. ולכן כדאי קודם לפתור את סעיף ב')