תרגיל 7

31 בדצמבר 2012

1. תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$, $N \leq H \leq G$.
   (א) הוכח ש H/N היא תת־חבורה של G/N.
   (ב) הראה שאם H היא תת־חבורה נורמלית של G, אזי $G/N \trianglelefteq H/N$.
2. תהי G חבורה, $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$.
   (א) הוכח $H \cap N$ היא תת־חבורה נורמלית של H.
   (ב) לכל $a\left(H \cap N\right) \in H/H\cap N$ נגדיר $\phi\left(a\left(H \cap N\right)\right) = aN$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב. כלומר, אם $b\left(H \cap N\right) = a\left(H \cap N\right)$, אזי $\phi(a\left(H \cap N\right)) = \phi\left(b\left(H \cap N\right)\right)$. זאת אומרת שהתמונה של ϕ אינה תלוייה בבחירת נציג מחלקת שקילות ובכך מגדירה פונקציה מ $H/H\cap N$ ל G/N.
   (ג) הראה ש ϕ היא שיכון של $H/H\cap N$ בתוך G/N. (הומומורפיזם חח"ע מ $H/H\cap N$ ל G/N).

נצטט את משפטי האיזומורפיזם השני והשלישי.

משפט האיזומורפיזם השני: תהי G חבורה, ויהיו A, B תתי־חבורות של G ונניח ש $B \trianglelefteq G$. אזי AB חבורה, $A \cap B \trianglelefteq B$, $B \trianglelefteq AB$ ומתקיים $A/A\cap B \cong AB/B$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: תהי G חבורה, המקיימת $N, K \trianglelefteq G$, וכן $N \leq K$. אזי $K/N \trianglelefteq G/N$ ומתקיים:

$$G/N\big/K/N \cong G/K$$

בסדרת תרגילים הבאה תצטרכו להוכיח את המשפטים האלה. (לא להלחץ - ההוכחות הן קלות).

3. הנתונים - כמו במשפט האיזומורפיזם השני. נגדיר $\phi : A \to AB/B$ על ידי $\phi(a) = aB$
   (א) הראו ש ϕ הומומורפיזם.
   (ב) הראו ש ϕ על.
   (ג) הוכיחו ש $\ker\phi = A \cap B$.
   (ד) בעזרת משפט איזומורפיזם הראשון הסיקו את משפט האיזומורפיזם השני: $A/A\cap B \cong AB/B$.
4. הנתונים כמו במשפט האיזומורפיזם השלישי. נגדיר $\phi : G/N \to G/K$ על ידי $aN \mapsto aK$.
   (א) הוכיחו ש ϕ מוגדרת היטב. זאת אומרת אם $g_1N = g_2N$ אזי $\phi(g_1N) = \phi(g_2N)$.
   (ב) הוכיחו ש ϕהומומורפיזם.
   (ג) הוכיחו ש ϕעל.
   (ד) הראו ש $\ker\phi = K/N$.
   (ה) הפעילו את משפט האיזומורפיזם הראשון והסיקו את משפט האיזומורפיזם השלישי:

$$G/N\big/K/N \cong G/K.$$

5. נזכיר, $K_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ היא תת־חבורה נורמלית של S_4. לאיזו חבורה איזומורפית S_4/K_4?

רמז: השתמש במיון של חבורות מסדר 6.

6. מצא שיכון של חבורה הדיהדרלית D_n בתוך $GL_2(\mathbb{R})$.

רמז: החבורה הדיהדרלית נוצרת על ידי שיקוף וסיבוב. בתרגול, ראיתם איך ניתן לשכן סיבוב בתוך $GL_2(\mathbb{R})$ עכשיו, מצאו איך אפשר לשכן שיקוף ותראו שהחבורה שנוצרת על ידי סיבוב ושיקוף שמצאתם איזומורפית ל D_n.

7. תהיינה G, H חבורות, $\phi : G \to H$ איזומורפיזם, $N \trianglelefteq G$ תת־חבורה של G. הוכיחו: ${}^{G}/_{N} \cong {}^{H}/_{\phi(N)}$.

8. תהי G חבורה, $H \trianglelefteq G$ מאינדקס p ראשוני. הוכיחו כי לכל $K \leq G$ מתקיים אחד מן השניים:

(א) $K \leq H$.

(ב) $G = HK$ וכן $[K : K \cap H] = p$.

רמז: משפט האיזומורפיזם השני.

9. תהיינה M, N תתי־חבורות נורמליות של G כך ש $MN = G$. הוכח ש $G/(M \cap N) \cong G/M \times G/N$.

רמז: מצא העתקה מ G ל $G/M \times G/N$ וחשב את הגרעין שלה. לאחר מכן, הפעל את משפט האיזומורפיזם הראשון.

10. תהי G חבורה. נגדיר אקספוננט של חבורה, $exp(G)$ להיות המספר המינימלי n כך שלכל $g \in G$, $g^n = 1_G$. אם לא קיים כזה, אומרים כי $exp(G) = \infty$.

(א) חשב את $exp(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10})$.

(ב) נניח ש G ו H איזומורפיות. הוכח כי יש להן אותו אקספוננט.

11. תהי G חבורה. נסמן ב $Aut(G)$ את קבוצת כל האוטומורפיזמים של G (אוטומורפיזם = איזומורפיזם מ G אל עצמה).

(א) הוכח ש $Aut(G)$, עם פעולת ההרכבה, היא חבורה.

(ב) מצא את $Aut(\mathbb{Z})$.

(ג) הוכח: $Aut(\mathbb{Z}_n) \cong U_n$.

תזכורת: לכל $g \in G$, הגדרנו את את ההצמדה על ידי g כך: ${}^g : G \to G$ על ידי $x^g := gxg^{-1}$. הוכחתם שהצמדה היא אוטומורפיזם.

(ד) הוכח שאוסף ההצמדות על ידי איבר ב g היא תת־חבורה נורמלית של $Aut(G)$. חבורה זו נקראת חבורת האוטומורפיזמים הפנימיים של G. נסמן אותה ב $Inn(G)$.

(ה) הוכח ש ${}^{G}/_{Z(G)} \cong Inn(G)$. (רמז: משפט האיזומורפיזם הראשון).

תזכורת: המרכז של חבורה G הוא $Z(G) = \{g \in G : \forall x \in G, xg = gx\}$.