

הרצאה X- אינפי 1

הערה לגבי מבחן קושי: אפשר להכליל את משפט קושי למבחן הבא:

משפט: אם יש לנו טור חיובי, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$, נסמן $q = K_n = \limsup^n \sqrt[n]{a_n}$. אזי:

1. $q < 1$ אזי הטור מתכנס

2. $q > 1$ אזי הטור מתבדר

הוכחה: נתחיל מ2. נבחר $1 < q' < q$. נגדיר $L_n = \sup\{K_n, K_{n+1}, \dots\}$ וסדרה זו שואפת ל q . מתקיים $1 < q' < L_n$ $\forall n \geq \bar{n}$ ולכן $1 < K_{m_n} < L_n$ ואז ע"פ הגדרת המבחן (או סדרה) מתקבל $a_{m_n} > 1$. לכן האיבר הכללי אינו שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר.

נעבור ל1. נבחר $1 < q' < q$. בדרך דומה נקבל כי מתקיים $a_n < (q')^n$, הצד הימני מתכנס, ולכן גם הטור.

תרגילים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = +\infty$ כי האיבר הכללי שואף ל $\frac{1}{e} \neq 0$, ולכן מתבדר ע"פ קושי.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$, נוכיח ע"י חישוב $1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \frac{1}{e}$.

התכנסות בהחלט:

הגדרה: אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם גם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

משפט: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אזי הוא מתכנס.

הוכחה: ע"פ קירטריון קושי נקבל $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, לכן תנאי קושי מתקיים, ולכן $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}$ וע"פ הגדרה מתקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{n^2}$. נבדוק אם $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin 2^n}{n^2} \right|$ מתכנס. הטור מתכנס בהחלט כי $\left| \frac{\sin 2^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} < \infty$ וע"פ משפט קיבלנו את הדרוש.

נכליל ונקבל כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כד ש $|a_n| \leq \alpha_n$ אם $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

מבחנים מיוחדים:

לוגריתמי: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{|a_n|}}{\ln n} = \alpha$ אם $1 > \alpha$ לא מתכנס בהחלט. ואם $1 < \alpha$ מתכנס בהחלט.

דלמבר: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$ אם $q < 1$ מתכנס בהחלט. אם $q > 1$ לא מתכנס בהחלט.

קושי: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ אם $q < 1$ מתכנס בהחלט. אם $q > 1$ לא מתכנס בהחלט.

התכנסות על תנאי:

הגדרה: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אבל לא בהחלט אזי הטור מתכנס כל תנאי. ז"א, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אבל $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ מתכנס על תנאי. זה נקרא הטור של לייבניץ, Leibnitz.

משפט Leibnitz: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ כאשר c_n חיובית ויורדת מונוטונית. אזי הטור C מתכנס.

$$S_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c_k$$

$$S_{2m} = C_1 - C_2 + C_3 - \dots - C_{2m} = C_1 - (C_2 - C_3) - \dots - (C_{2m-2} - C_{2m-1}) - C_{2m}$$

ונקבל מתקיים $S_{2m+2} = S_{2m} + \underbrace{C_{2m+1} - C_{2m+2}}_{\geq 0}$. מכאן ש $S_{2m} \nearrow$ ומתקיים כי $S_{2m} < C_1$. לכן קיים הגבול $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m}$. נראה בדרך

דומה כי גם עבור האי זוגיים הדבר מתקיים, ונקבל כי ע"פ משפט קיים גבול ל $S_n = S$, והוכחנו את הדרוש, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ מתכנס! (וברור כי $S \leq C_1$).

מסקנה: הי $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ (c) כאשר c_n חיובית ויורדת מונוטונית. אזי $|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k| \leq C_n$.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ כאשר α ממשי. מצא לאיזה α הטור מתכנס, מתכנס בהחלט, מתבדר, ומתכנס על תנאי.

פתרון: התכנסות בהחלט: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אם $\alpha > 1$ גדול מאחד. מתבדר אם $\alpha \leq 1$. ז"א שעבור $\alpha > 1$ מתכנס בהחלט, וכמו כן עבור $0 < \alpha \leq 1$ לא מתכנס בהחלט. עבור $\alpha > 0$ אפשר לראות שלפי המשפט של לייבניץ מתכנס על תנאי אם $\alpha > 0$. ואם $\alpha \leq 0$ התנאי ההכרח לא מתקיים.

לסיכום: $0 < \alpha \leq 1$ מתכנס על תנאי. פתרנו ☺
 $\alpha > 1$ מתכנס בהחלט
 $\alpha \leq 0$ מתבדר

מבחנים של התכנסות (על תנאי): של Dirichlet & Abel

משפט: (מבחן דיריכלה). יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. נניח ש:

א. סכומים חלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסומים. ז"א $|\sum_{k=1}^n a_k| \leq C \forall n \geq 0$

ב. $b_n \searrow \rightarrow 0$ (יורדת מונוטונית ושואפת לאפס).

ואז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ מתקיימים התנאים כי הסכומים החלקיים של $(-1)^{n-1}$ אי שליליים ו c_n שואף לאפס, ויורד מונוטונית.

הוכחה: נוכיח בעזרת קריטריון קושי. $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$.

התמרת אבל: $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$ ונתון כי $|A_n| \leq C$. ע"פ ההגדרה מתקיים $a_k = A_k - A_{k-1}$.

כעת נגדיר: $T_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} b_k$, והפעם נציב $k-1=m$.

נקבל $A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{m=n}^{n+p-1} A_m b_{m+1}$ וזוהי בדיוק התמרת אבל.

$$|T_{n,p}| \leq \underbrace{|A_{n+p}| |b_{n+p}|}_{\leq C |b_{n+p}|} + \underbrace{|A_n| |b_{n+1}|}_{\leq C |b_{n+1}|} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}|}_{\leq C \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1})}$$

ולכן מתקיים $|T_{n,p}| \leq C(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|) + C \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) \leq 2C(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|)$ ולכן מתקיים $|T_{n,p}| \leq 2C(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|)$ ובגלל ש $b_n \rightarrow 0$ מתקיים כי $|b_n| \leq \frac{\epsilon}{4C} \forall n \geq \bar{n}$. משל.

משפט: (מבחן של Abel). יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ כך ש:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. b_n מונוטוני וחסומה.

אזי הטור מתכנס.

הוכחה: b_n מונוטוני וחסומה, לכן קיים גבול ל b_n . נקרא לגבול זה L . נסמן: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$. לכן מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - L + L) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - L)}_{\text{מתכנס ע"פ דריכלה}} + L \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{מתכנס לפי תנאי}}$$

טורים מתכנסים הוא טור מתכנס. משל.