תקציר הרצאות באלגברה לינארית 2

בועז צבאן ובוריס קוניאבסקי

14 בינואר 2011

הערה: יש כמה הוכחות מפורטות או פירוט נוסף להוכחות, שאפשר לתת לתלמידים לקריאה עצמית. במקרים שיש הוכחות כאלה, יש סימן * בסילבוס. לקבלת קבצי ההוכחות, אפשר לפנות אל ד"ר צבאן באימייל.

החלוקה המובאת כאן היא לכ 28 הרצאות של שעתיים (14 שבועות), אולם הן די הדוקות ובכתות מסויימות יידרש יותר זמן לחלק מהנושאים. אפשרויות להתמודד עם מצב כזה:

1. הנושא של דטרמיננטות (4 הרצאות) אמור להלמד בלינארית 1.
2. במקרה שהנושא לא נלמד בלינארית 1, לדלג על ההוכחות בנושא תמורות, שיילמדו בקורס אלגברה בשנה ב' (כהרצאה אחת).
3. להקדים את הטיפול בצורת ג'ורדן, וכך לייתר את הדיון בשילוש מטריצה (חצי הרצאה).
4. מצד שני, ראוי ללמוד גם תבניות בילינאריות במסגרת הקורס (בזמן שמתפנה מהעברת דטרמיננטות לסמסטר א).

1 תמורות (פרמוטציות)

1. תמורה (פרמוטציה) על קבוצה. דוגמאות. כתיבה כמערך בן שתי שורות.
2. S_X, S_n.
3. חילוף סדר בתמורה. הסימן של תמורה $\operatorname{sgn}(\sigma)$. תמורה זוגית ואיזוגית.
4. $\operatorname{sgn}(\sigma)=\frac{\prod_{i<j}(x_i-x_j)}{\prod(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)})}$ (משתנים פורמלים).
לא משנה הסדר לפיו עוברים על הזוגות.
מותר להחליף, בחלק מהזוגות או בכולם, את הסדר של i,j בתנאי שעושים זאת בצורה עקבית, כלומר גם במונה וגם במכנה.
5. $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$.
הוכחה: $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=\frac{\prod_{i<j}(x_i-x_j)}{\prod(x_{\sigma\tau(i)}-x_{\sigma\tau(j)})}=\frac{\prod_{i<j}(x_{\tau(i)}-x_{\tau(j)})}{\prod(x_{\sigma\tau(i)}-x_{\sigma\tau(j)})}\cdot\frac{\prod_{i<j}(x_i-x_j)}{\prod(x_{\tau(i)}-x_{\tau(j)})}=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$.
6. מסקנה: שויון הסימן של תמורה והתמורה ההופכית לה.
7. חילופים, מחזורים.
8. הסימן של חילוף הוא -1.
הוכחה: $(i_1\,i_2)=\sigma(1\,2)\sigma^{-1}$ כאשר $\sigma(1)=i_1,\sigma(2)=i_2$ והשאר לא משנה.
9. הסימן של מחזור מאורך k הוא $(-1)^{k-1}$.
הוכחה: $(i_1\,\ldots\,i_k)=(i_1\,i_2)(i_2\,i_3)\cdots(i_{k-1}\,i_k)$.
10. הצגת תמורה כמכפלת מחזורים זרים.
11. חישוב סימן של תמורה על ידי פירוק למחזורים זרים.

2 דטרמיננטות

1. הגדרת הדטרמיננטה ($|A|,\det(A)$) כסכום של מכפלות.
2. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית.
3. המקרים $n=2,3$ וכללי אצבע לחישובם.
4. לינאריות הדטרמיננטה בכל שורה.
5. מסקנה: אם A' התקבלה מ A על ידי כפל שורה של A ב α, אז $|A'|=\alpha\,|A|$.
6. למטריצה עם שתי שורות שוות דטרמיננטה 0.
הוכחה: סוכמים בנפרד על התמורות הזוגיות ובנפרד על האיזוגיות. האיזוגיות מתקבלות מהזוגיות על ידי כפל בחילוף $(i\,j)$ כאשר i,j הן השורות שהוחלפו.
7. (אי) השפעת $R_i+\alpha R_j$ על הדטרמיננטה (מלינאריות).
8. השפעת החלפת שורות על הדטרמיננטה.
9. הערה: מזה נובע (4) למאפיין שונה מ 2.
10. מסקנה: אפשר לחשב דטרמיננטה על ידי דירוג המטריצה.
11. דוגמה לחישוב דטרמיננטה על ידי דירוג שורות.

3 מכפלות של דטרמיננטות

1. $|A|=|A^t|$.
2. מסקנה: המשפטים על שורות נותנים משפטים על עמודות.
3. פונקציה $f:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$ תיקרא **כמו־דטרמיננטה** אם $f(A)$ לינארית בכל שורה של A, מחליפה סימן עם החלפת שורות, ומתאפסת על כל מטריצה עם שתי שורות שוות. (הדרישה האחרונה נובעת מזו שלפניה כאשר המאפיין שונה מ 2).
4. פונקצית הדטרמיננטה היא כמו־דטרמיננטה.
5. פעולות אלמנטריות משפיעות על כמו־דטרמיננטה באותה צורה שהן משפיעות על הדטרמיננטה.
6. יחידות הדטרמיננטה: אם f היא כמו־דטרמיננטה, אז $f(A)=\alpha|A|$, כאשר $\alpha:=f(I)$. [ואותו משפט עבור עמודות.]
(הוכחה: בודקים איך הדירוג משפיע על הפונקציה. פורמלית, באינדוקציה על מספר הצעדים המינימלי בדירוג המטריצה.)
7. * אם המטריצות B,D ריבועיות, אז $\begin{vmatrix} B & C \\ O & D \end{vmatrix}=|B|\cdot|D|$.
הוכחה: $f(D):=\begin{vmatrix} B & C \\ O & D \end{vmatrix}$ היא כמו־דטרמיננטה, לכן $f(D)=\alpha\cdot|D|$, כאשר $\alpha=f(I)=\begin{vmatrix} B & C \\ O & I \end{vmatrix}$.
$g(B):=\begin{vmatrix} B & C \\ O & I \end{vmatrix}$ היא כמו־דטרמיננטה (בעמודות B), לכן $g(B)=\beta\cdot|B|$, כאשר $\beta=g(I)=\begin{vmatrix} I & C \\ O & I \end{vmatrix}=1$ כמטריצה משולשית.

8. $\star$ $|AB| = |A| \cdot |B|$.
(הוכחה: נסמן $f(A) := |AB|$. f מולטילינארית ומחליפה סימן עם החלפת שורות, לכן $f(A) = \alpha |A|$, כאשר $\alpha = f(I) = |IB| = |B|$.)

9. $\star$ מסקנות:
   (א) A הפיכה $\iff |A| \neq 0$.
   (ב) מכפלת מטריצות היא הפיכה אם ורק אם כולן הפיכות.
   (ג) $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.
   (ד) $\left|A^k\right| = |A|^k$.

4 המטריצה הנלוית (Adjoint)

1. משפט קרמר על חישוב פתרון למערכת משוואות הפיכה.
הוכחה:

$$\begin{aligned} \frac{|A_i|}{|A|} &= |A|^{-1}|A_i| = \left|A^{-1}A_i\right| = \\ &= \left|\left(A^{-1}v_1, \ldots, A^{-1}b, \ldots, A^{-1}v_n\right)\right| = \\ &= \begin{vmatrix} & x_1 & \\ e_1, \ldots, & \vdots & , \ldots, e_n \\ & x_n & \end{vmatrix} = x_i \end{aligned}$$

השוויון האחרון מאיפוס כל x_j אחר על ידי הוספת כפולה של e_j לעמודה i (או מדטרמיננטה של מטריצת בלוקים).

2. מינורים A_{ij}.

3. **משפט לאפלס** (פיתוח דטרמיננטה לפי שורה או עמודה): $|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ (פיתוח לפי שורה i), ובדומה עבור עמודה.
הוכחה: ממולטיניאריות בשורה i נקבל $|A| = a_{i1}|B_1| + \cdots + a_{in}|B_n|$ כאשר $B_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ e_j \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ המטריצה המתקבלת מ A על ידי החלפת שורה i בוקטור היחידה e_j.
על ידי $i-1$ החלפות שורה ואחריהן $j-1$ החלפות עמודה, נביא את הסקלר 1 בוקטור היחידה לפינה העליונה השמאלית של המטריצה, לקבל: $|B_j| = (-1)^{i-1+j-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & A_{ij} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot 1 \cdot |A_{ij}|$.

4. המטריצה הנלוית.

5. $\star$ $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = |A|I$.

6. שימוש לחישוב המטריצה ההופכית.

7. המקרים $n = 2, 3$.

8. הדרגה של מטריצה ריבועית שווה לסדר המירבי של מינור שאינו אפס.

5 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

1. **ערך עצמי ווקטור עצמי** של מטריצה (ריבועית).

2. ערך עצמי יכול להיות אפס (אסם המט' אינה הפיכה).

3. מציאת הע"ע: λערך עצמי אסם $|\lambda I - A| = 0$.

4. דוגמא שיש ודוגמא שאין ע"ע.

5. הע"ע של מטריצה משולשית.

6. מציאת הו"ע: פתרון המערכת ההומוגנית $(\lambda I - A)x = \vec{0}$ (או $(A - \lambda I)\,x = \vec{0}$).

7. תרגום המושגים והמשפטים לאופרטורים לינאריים $T : V \longrightarrow V$:
   (א) ע"ע וו"ע של אופרטור לינארי.
   (ב) ע"ע של אופרטור לינארי שוים לע"ע של (כל) מטריצה המייצגת אותו.
   (ג) למטריצות דומות אותה דטרמיננטה.
   (ד) דטרמיננטה של העתקה לינארית (לא תלויה בבסיס).

8. לקריאה עצמית$\star$: שיטות למציאת שרשי פולינומים.

6 ליכסון (בסיסי)

1. **קריטריון לליכסון מטריצה.** מטריצה ריבועית היא לכסינה אסם יש בסיס המורכב מו"ע שלה.

2. הבסיס הוא עמודות המטריצה המלכסנת.

3. הערכים העצמיים מופיעים באלכסון, לפי סדר הוקטורים העצמיים.

4. מרחב עצמי $V_\lambda = V_\lambda(A)$ ומדוע הוא (תת־)מרחב.

5. בלוק ג'ורדן $J_\lambda(n)$ כדוגמא למטריצה שאינה לכסינה (כאשר $2 < n$).

6. $\star$ תרגום לאופרטורים.

7 הפולינום האופייני

1. **הפולינום האופייני** $p_A(x)$.

2. **פולינום מתוקן. תיקון פולינום.**

3. הפולינום האופייני מתוקן ומעלתו n.

4. אם $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, אז $a_0 = (-1)^n|A|$, ו $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$.

5. למטריצות דומות אותו פולינום אופייני (ובפרט אותם ערכים עצמיים).

6. פולינום אופייני של אופרטור לינארי מוגדר היטב, ושווה לפולינום האופייני של כל הצגה שלו.

8 ריבוי גאומטרי ואלגברי, והקשר לליכסון

1. אם α שורש של פולינום $f(x)$, אז $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ לאיזשהו פולינום $g(x)$.
הוכחה: $x^k - \alpha^k = (x-\alpha)\sum_{i=1}^{k} x^{k-i}\alpha^{i-1}$.

2. הגדרת **פולינום מחלק פולינום** $f(x)|g(x)$.
הראינו: אם אם $g(\alpha) = 0$, אז $(x-\alpha)|g(x)$.

3. **ריבוי אלגברי וריבוי גאומטרי.**

4. $n \leq$הריבוי האלגברי≤ 1.

5. הריבוי הגאומטרי $\geq$ הריבוי האלגברי.

6. דוגמאות קצה: הריבוי האלגברי והגאומטרי במטריצה סקלרית ובבלוק ג׳ורדן.
7. אם A לכסינה, אז $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.
8. ו״ע המתאימים לע״ע שונים הם בת״ל.
9. מסקנה: אם למטריצה יש n ע״ע שונים, אז היא לכסינה.
10. **קריטריון מפורט לליכסון.** כאשר $p_A(x)$ מל״ל: A לכסינה אםם הריבוי הגאומטרי של כל ע״ע שווה לריבוי האלגברי שלו.

9 שילוש מטריצה ומשפט קיילי־המילטון

1. **משפט השילוש.** A ניתנת לשילוש $\iff$ $p_A(x)$ מל״ל מעל $\mathbb{F}$.
2. **הצבת מטריצה בפולינום.**
3. **משפט קיילי־המילטון.** $p_A(A)=O$.
הוכחה:
$$(xI-A)\operatorname{adj}(xI-A)=p_A(x)I=(x^n+\cdots+\alpha_0)I$$
ואפשר לכתוב
$$\operatorname{adj}(xI-A)=x^{n-1}B_{n-1}+\cdots+xB_1+B_0$$
מציבים ומשווים אגפים.
4. דוגמאות: $J_\lambda(n)$; מטריצה אלכסונית.
5. $\star$ הפולינום האופייני של המטריצה המלווה (companion matrix).

10 הפולינום המינימלי

1. **הפולינום המינימלי** $m_A(x)$ (מתוקן מדרגה מינימלית שמאפס).
2. יחיד.
3. דרגתו $\le n$.
4. אם $Av=\lambda v$, אז לכל $p(x)\in\mathbb{F}[x]$, $p(A)v=p(\lambda)v$.
5. מסקנה: כל ע״ע מאפס את $m_A(x)$.
6. **חלוקה של פולינומים עם שארית.**
7. $m_A(x)\mid p_A(x)$ ולמעשה כל פולינום שמאפס.
8. $\star$ $p_A(x)\mid (m_A(x))^n$.
הוכחה: יש מטריצה $B(x)=B_0+xB_1+x^2B_2+\cdots+x^{k-1}B_{k-1}$ כך ש $(xI-A)B(x)=m_A(x)I$. מפעילים דטרמיננטה על שני האגפים.
9. מסקנה: לפולינום האופייני והמינימלי אותם גורמים אי פריקים.
10. דוגמאות: מטריצה סקלרית, בלוק ג׳ורדן.
11. הפולינום האופייני והמינימלי של סכום ישר של מטריצות. דוגמאות: מטריצה אלכסונית, סכום בלוקי ג׳ורדן.

11 מכפלה פנימית

1. **מכפלה פנימית** על מרחב וקטורי מעל הממשיים או המרוכבים.
2. **המ״פ הסטנדרטית** על $\mathbb{F}^n$.
3. **מטריצת גראם** $G_{\{v_1,\dots,v_k\}}$ של כל המכפלות הפנימיות $\langle v_i,v_j\rangle$.
4. $\langle v,w\rangle=[v]_B^tG_B\overline{[w]_B}$.
5. לכל זוג בסיסים B,C מתקיים $G_B=\left([I]_C^B\right)^tG_C\overline{[I]_C^B}$.

12 נורמה, בסיס אורתונורמלי

1. **נורמה, נורמה מושרית ממ״פ**
2. הוכחת אי־שויון קושי־שוורץ (ההוכחה שנובעת מגראם־שמיט, עם הבטחה שה״קסם״ יובן בהמשך).
3. הוכחה שהנורמה המושרית היא נורמה.
4. **וקטור נורמלי, נירמול וקטור.**
5. **קבוצה אורתוגונלית.**
6. $S\not\ni\vec{0}$ אורתוגונלית $\Leftarrow S$ בת״ל.
7. **קבוצה אורתונורמלית.**
8. בת״ל.
9. **בסיס אורתוגונלי ואורתונורמלי.**
10. בסיס הוא בא״נ אםם $G_B=I$.
11. הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית).
12. עבור בא״נ, $\langle u,v\rangle=[u]_B^t\overline{[v]_B}$.
13. **מסקנה** (משפט פיתגורס): $\|v\|^2=[v]_B^t\overline{[v]_B}=|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_n|^2$ כשמדובר בבא״נ.

13 בסיס אורתונורמלי (המשך)

1. הצגת וקטור לפי בא״נ: אם $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$, אז $\alpha_i=[v]_Be_i=[v]_B^t\overline{[v_i]_B}=\langle v,v_i\rangle$.
2. **מטריצה אוניטרית.**
3. מטריצה אוניטרית $\Leftrightarrow$ שורותיה בא״נ (ביחס למ״פ הסטנדרטית) $\Leftrightarrow$ עמודותיה בא״נ (ביחס למ״פ הסטנדרטית).
4. מטריצת מעבר בין בא״נ היא אוניטרית: $\left([I]_F^E\right)^tG_F\overline{[I]_F^E}=G_E$ ושתי המטריצות גראם הן I.

14 המרחב הניצב ותהליך גראם־שמידט

1. **וקטורים מאונכים.**
2. **המרחב הניצב לקבוצה** $S^\perp$.
3. $S^\perp=\operatorname{span}(S)^\perp$.
4. היטל של וקטור לתת־מרחב W עם בא״נ $B=\{v_1,\dots,v_k\}$: $\pi_B(v):=\langle v,v_1\rangle v_1+\cdots+\langle v,v_k\rangle v_k$ (ללא הוכחת אי־תלות בבסיס).
5. ההיטל שייך לתת־המחבב.
6. $v\in W\Leftrightarrow \pi_B(v)=v$.
7. $v-\pi_B(v)\in W^\perp$.
8. **תהליך גראם־שמידט** (עם נירמול).
9. תהליך גראם־שמידט בלי נירמול. (אופציונלי: כפל כל וקטור תוצאה בסקלר שאינו אפס.)

15 שימושים של גראם־שמידט ומשפט הפירוק הניצב

1. השלמת קבוצה אורתונורמלית לבא"נ.
2. מסקנה: אי"ש קושי־שוורץ לעיל.
3. אי־שויון בסל.
4. הוכחה של אי"ש קושי־שוורץ בעזרת אי"ש בסל.
5. מטריצה המעבר מתוצר תהליך גראם־שמידט לבסיס המקורי היא משולשית עליונה. במקרה שאין נירמול: כל אברי האלכסון הם 1. (ולכן גם מטריצת המעבר בכוון ההפוך.) הדטרמיננטה של מטריצת המעבר היא 1, ולכן למטריצות גראם של הבסיס המקורי והחדש אותה דטרמיננטה.
6. **משפט הפירוק הניצב.**
7. $U^{\perp\perp}=U$.
8. ההטלה לתת־מרחב אינה תלויה בבחירת בסיסו האורתונורמלי, מיחידות ההצגה במשפט הפירוק הניצב: $\pi_B(v)+(v-\pi_B(v))=v=\pi_C(v)+(v-\pi_C(v))$.
9. אם $u\perp v$, אז $\|u\pm v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.
10. ההיטל של v על W הוא הוקטור ב W הקרוב ביותר ל v: $v-\pi(v)\perp w-\pi(v)$, לכן מהסעיף הקודם, $\|v-w\|^2=\|v-\pi(v)\|^2+\|w-\pi(v)\|^2$.

גישה אלטרנטיבית : מוכיחים בעזרת משוואות לינאריות ש $\dim U^\perp=\dim V-\dim U$ ומשתמשים במשפט המימדים (הסכום ישר) לקבל את משפט הפירוק הניצב. מראים קיום בסיס אורתוגונלי לתת־מרחב באינדוקציה על מימדו. מגדירים היטל בעזרת יחידות הצגה. מראים שאפשר לחשבו בעזרת (כל) בא"נ של תת־המרחב, כנ"ל. (גראם־שמידט לא מתייתר, מפני שהוא בניה מפורשת של בא"נ.)

חומר למחשבה: אולי עדיף להגדיר נורמה ונורמה מושרית רק אחרי שאנו יכולים להוכיח את אי־שויון קושי שוורץ (ולקבל שהנורמה המושרית היא אכן נורמה). למשל: הוכחת משפט הפירוק הניצב, ואחריו יודעים ש $v=\alpha u+w$ כאשר $u\perp w$. הצבה מראה $|\langle v,u\rangle|^2<\langle v,v\rangle\langle u,u\rangle$ כאשר $w\neq\vec{0}$. (החיסרון: לא רואים איך אפשר לחשב פירוק ניצב בעזרת גראם־שמידט. אפשר לציין בנפרד.)

16 אופציונלי: משמעות גיאומטרית למטריצת גראם ולדטרמיננטה

1. **מרחק בין וקטורים** $d(u,v)=\|u-v\|$. **מרחק בין וקטור לקבוצה** $d(u,S)=\inf\{d(u,v):v\in S\}$. מקרה מיוחד: S תת־מרחב. האינפימום מתקבל כמרחק מההיטל.
2. מרחק וקטור v מתת־מרחב W: יהי $v_1,\dots,v_k$ בסיס של W. אז $d(v,W)=\sqrt{\det G_{\{v_1,\dots,v_k,v\}}/\det G_{\{v_1,\dots,v_k\}}}$. הוכחה: יהי $\{u_1,\dots,u_k,u\}=GS(v_1,\dots,v_k,v)$ בלי נירמול. אז $\det G_{\{v_1,\dots,v_k,v\}}=\det G_{\{u_1,\dots,u_k,u\}}=\det G_{\{u_1,\dots,u_k\}}\cdot\|u\|^2=\det G_{\{v_1,\dots,v_k\}}\cdot\|u\|^2$ ו $u=v-\pi(v)$ הוקטור שנורמתו היא המרחק.
3. **פוליטופ (מקבילון?)** : $P(v_1,\dots,v_k)=\{\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k : 0\le\alpha_1,\dots,\alpha_k\le 1\}$.
4. נפח של פוליטופ מוגדר באינדוקציה על k:
$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(P(v_1)) &= \|v_1\|\\ \mathrm{vol}(P(v_1,\dots,v_{k+1})) &= \mathrm{vol}(P(v_1,\dots,v_k))\cdot\\ &\quad\cdot d(v_{k+1},\mathrm{span}\{v_1,\dots,v_k\})\end{aligned}$$
5. הנפח הוא אפס אסם הוקטורים תלויים לינארית.
6. במקרה המעניין (שהוקטורים בת"ל): $\mathrm{vol}(P(v_1,\dots,v_k))=\sqrt{\det G_{\{v_1,\dots,v_k\}}}$. (באינדוקציה על k.)
7. פרשנות גאומטרית לדטרמיננטה: יהיו $v_1,\dots,v_n$ בסיס. נקבע בא"נ (כלשהו) B. תהי $P=[I]_B^{\{v_1,\dots,v_k\}}$. מנוסחת שינוי בסיס של מטריצת גראם, $\mathrm{vol}(P(v_1,\dots,v_k))=|\det P|$ (ערך מוחלט, בלי שורש).
8. השפעה של העתקה לינארית על נפח פוליטופ:
   (א) $T\left[P(v_1,\dots,v_k)\right]=P(Tv_1,\dots,Tv_k)$.
   (ב) $\mathrm{vol}\left(T\left[P(v_1,\dots,v_k)\right]\right)=\mathrm{vol}\left(P(v_1,\dots,v_k)\right)\cdot\det T$.

17 ההעתקה הצמודה

1. **פונקציונל לינארי.**
2. **משפט ההצגה של ריס.** כל פונקציונל לינארי ניתן להציג ככפל בוקטור קבוע (יחיד).
3. **ההעתקה הצמודה** T^* עבור העתקה לינארית $T:V\to W$ ממ"פ מעל אותו שדה.
4. $T^*:W\to V$ העתקה לינארית.
5. עבור בסיסים אורתונורמלים, $[T^*]_E^F=\left([T]_F^E\right)^*$.
6. מסקנה: חישוב $(T+S)^*,(\alpha T)^*,T^{**},(ST)^*$.

18 תכונות וסוגים מיוחדים של אופרטורים

הערה*: בהרצאה זו, אפשר במקום הזהות הפולרית להשתמש בלמה, שאם T צל"ע ומקיימת $(\forall v)\ \langle Tv,v\rangle=0$, אז $T=O$ (ההוכחה דומה להוכחת הזהות הפולרית).

1. **אופרטור נורמלי, אוניטרי, צמוד לעצמו. מטריצה נורמלית, אוניטרית, צמודה לעצמה.**
2. אופרטור נורמלי/אוניטרי/צל"ע ⇔ הצגתו לפי בא"נ נורמלית/אוניטרית/צל"ע.
   מטריצה היא נורמלית/אוניטרית/צל"ע ⇔ האופרטור $L_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ של כפל ב A משמאל הוא נורמלי/אוניטרי/צל"ע.
3. $Re\langle u,v\rangle=\frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)$ (מחישוב $\|u+v\|^2$).
4. הזהות הפולרית מעל $\mathbb{R}$:
$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right).$$
5. $im\langle u,v\rangle=\frac{1}{2}\left(\|u+iv\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)$ (מחישוב $\|u+iv\|^2$).

6. הזהות הפולרית מעל $\mathbb{C}$:

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|u+iv\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right).$$

7. מסקנה: הנורמה קובעת את המכפלה הפנימית.

8. T נורמלי $\iff$ $\|Tv\| = \|T^*v\|$ $(\forall v)$. (מהזהות הפולרית.)

9. התכונות הבאות שקולות עבור אופרטור (מהזהות הפולרית):

   (א) אוניטרי.

   (ב) שומר נורמה.

   (ג) שומר מרחקים.

   (ד) שומר מכפלה פנימית.

10. **זוית** במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

11. אם T נורמלי, אז T, T^* משפיעים באותו אופן על זויות.

12. אופרטור אוניטרי שומר גם זויות.
הכיוון ההפוך לא נכון: $T(v) = 5v$ על $\mathbb{R}^2$.

13. חישוב מטריצה הסיבוב R_α על $\mathbb{R}^2$ (על סמך פעולותיה על e_1, e_2).

14. שימוש: כיון ש $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$, נקבל הוכחה לנוסחאות של $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta)$.

19 שילוש וליכסון אוניטריים

1. עבור אופרטור/מטריצה נורמלי/ת, אם $Av = \lambda v$, אז $A^*v = \bar{\lambda}v$: גם $\lambda I - A$ נורמלית, לכן

$$0 = \|(\lambda I - A)v\| = \|(\lambda I - A)^* v\| = \left\|(\bar{\lambda} I - A^*)v\right\|.$$

2. מסקנות:

   (א) וקטורים עצמיים השייכים לע"ע שונים הם מאונכים.

   (ב) כל הערכים העצמיים של אופרטור צמוד לעצמו הם ממשיים.

3. אם $p_T(x)$ אינו מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$ (זה יכול לקרות רק אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$), אז T אינו ניתן לשילוש (ובפרט אינו לכסין). בדומה עבור מטריצות.

4. **משפט השילוש האוניטרי עבור אופרטורים:** אם $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, אז יש בסיס אורתונורמלי כך ש $[T]_B$ משולשית.
הוכחה: משפט השילוש ותהליך גראם־שמידט על הבסיס.

5. גם הכוון ההפוך נכון: T ניתן לשילוש $\iff p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

6. **משפט השילוש האוניטרי עבור מטריצות:** אם $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, אזיש P אוניטרית כך ש $P^{-1}AP$ משולשית. (ממשפט קודם.)

7. מציאת P במפורש, כתוצר ג"ש על P של משפט השילוש הרגיל.

8. מטריצה משולשית ונורמלית היא אלכסונית.
הוכחה: השוואת אברי האלכסון של $AA^* = A^*A$.

9. **משפט הליכסון האוניטרי עבור אופרטורים:** כל אופרטור **נורמלי** עם $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, הוא לכסין אוניטרית (מסעיף קודם).

10. נורמליות היא גם תנאי הכרחי: נורמלי + פ"א מל"ל = לכסין אוניטרית.

11. **משפט הליכסון האוניטרי עבור מטריצות:** כל מטריצה נורמלית עם פ"א מל"ל היא לכסינה אוניטרית, ולהיפך (ממשפט קודם).

12. במפורש: גראם־שמידט על בסיס המורכב מו"ע (יש כזה כי לכסינה). אפשר לבצעו לכל מרחב עצמי בנפרד.

20 ליכסון אורתוגונלי

1. אופרטור/מטריצה אוניטרי/ת מעל $\mathbb{R}$ נקרא **אורתוגונלי/ת**.

2. כאן לא נדרוש במשפטים שהפולינום האופייני מל"ל, אלא נוכיח זאת.

3. **משפט הליכסון האורתוגונלי עבור מטריצות:** לכל $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית, יש $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אורתוגונלית כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית. סימטריות היא גם תנאי הכרחי. ($p_A(x)$ מל"ל כי הע"ע ממשיים. נפעיל את (9) ־ מטריצה נורמלית עם פ"א מל"ל היא לכסינה אוניטרית.)

4. **משפט הליכסון האורתוגונלי עבור אופרטורים:** כל אופרטור אורתוגונלי הוא לכסין אורתונורמלית. אורתוגונליות היא גם תנאי הכרחי. (מסעיף קודם.)

5. (כמו קודם) במפורש: גראם־שמידט על בסיס המורכב מו"ע (יש כזה כי לכסינה), לכל מרחב עצמי בנפרד.

6. מסקנה: מעל $\mathbb{R}$, אם הפולינום האופייני מל"ל, אז נורמלי וצל"ע (=סימטרי) זה אותו דבר.

7. דוגמא נגדית כאשר הפ"א אינו מל"ל: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ מקיימת $A^t = -A$ (אנטי־סימטרית) ולכן נורמלית ולא סימטרית.

21 צורת ג'ורדן (כ 6 הרצאות)

מפורט ברשימות נפרדות.

22 המרחב הדואלי

1. $V^* := \operatorname{Hom}(V, \mathbb{F})$. בפרט, מ"ו מעל $\mathbb{F}$. להזכיר הגדרת חיבור וכפל בסקלר.

2. $\dim V^* = \dim \operatorname{Hom}(V,\mathbb{F}) = \dim V$, ולכן איזומורפיים.

3. **בסיס דואלי** לבסיס $B = \{v_1,\dots,v_m\}$: $B^* = \{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$, $\varphi_i(v_j) := \delta_{ij}$ (הגדרה על הבסיס B).

4. B^* בת"ל וגודלו שווה למימד של V^*, לכן בסיס.

5. הוכחה ישירה של פרישה: $\varphi = \varphi(v_1)\varphi_1 + \dots + \varphi(v_n)\varphi_n$ (בדיקה על $v_1,\dots,v_n$).
במלים אחרות, $[\varphi]_{B^*} = (\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))^t$.

6. דוגמה: אם V ממ"פ, אז $\varphi_i = \langle\cdot, v_i\rangle$.

7. לכל $v \in V$, $v = \varphi_1(v)v_1 + \dots + \varphi_1(v)v_n$, כלומר

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \varphi_n(v) \end{pmatrix}.$$

8. מתקבל איזומורפיזם מפורש:

$$\begin{aligned} v &\mapsto (\alpha_1,\dots,\alpha_n) := [v]_B = (\varphi_1(v),\dots,\varphi_n(v)) \\ &\mapsto \alpha_1\varphi_1+\cdots+\alpha_n\varphi_n = \varphi_1(v)\varphi_1+\cdots+\varphi_n(v)\varphi_n \end{aligned}$$

איזומורפיזם זה **תלוי בבחירת הבסיס** B.

9. יהיו E,F בסיסים ו E^*,F^* הבסיסים הדואלים. אזי $[I]_{F^*}^{E^*} = \left([I]_E^F\right)^t$.
נניח

$$\begin{aligned} E &= \{v_1,\dots,v_n\}, F=\{w_1,\dots,w_n\}, \\ E^* &= \{\varphi_1,\dots,\varphi_n\} \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} [I]_{F^*}^{E^*} &= ([\varphi_1]_{F^*},\dots,[\varphi_n]_{F^*}) = \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \varphi_2(w_1) & \dots & \varphi_n(w_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(w_n) & \varphi_2(w_n) & \dots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} [w_1]_E^t \\ \vdots \\ [w_n]_E^t \end{pmatrix} = \left([I]_E^F\right)^t \end{aligned}.$$

10. $V^{**} := (V^*)^*$, מרחב כל הפונקציונלים $\xi : V^* \to \mathbb{F}$.

11. $V \cong V^* \cong V^{**}$, ולכן $V \cong V^{**}$. נראה שיש איזומורפיזם "טבעי", כזה שאינו תלוי בבחירות של בסיסים.

12. לכל $v\in V$, נגדיר פונקציה $\hat{v} : V^* \to \mathbb{F}$ על ידי

$$\hat{v}(\varphi) := \varphi(v)$$

.

13. $\hat{v}$ לינארי, כלומר $\hat{v}\in V^{**}$.

14. הפונקציה $E : V \to V^{**}$ המוגדרת $E(v) := \hat{v}$ היא איזומורפיזם (שנקרא **איזומורפיזם ההצבה**).
הוכחה: לינארית. $\ker E = \left\{\vec{0}\right\}$, ולכן חח"ע. לכן על (כי המימד שווה).

15. כל בסיס של V^* הוא דואלי לאיזשהו בסיס של V.
יהי $C=\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ בסיס של V^*. אז $C^* = \{\psi_1,\dots,\psi_n\}$ בסיס של V^{**}. ניקח v_i כך ש $\hat{v}_i = \psi_i$. אז $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V, ו $B^*=C$:

$$\varphi_i(v_j) = \hat{v}_j(\varphi_i) = \psi_j(\varphi_i) = \delta_{ij}.$$

16. עבור $S\subseteq V$, $S^\circ := \{\varphi\in V^* : \forall v\in S, \varphi(v)=0\}$ **המאפס** של S. (מסומן גם $Ann(S)$.)

17. $S^\circ \subseteq V^*$ תת־מרחב.

18. $S^\circ = (\operatorname{span} S)^\circ$.

19. $\dim U + \dim U^\circ = \dim V$.
נשלים בסיס $\{v_1,\dots,v_k\}$ של U לבסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$ של V.
ניסוח ישיר: $\varphi\in U^\circ \iff [\varphi]_B = (0,\dots,0,*,\dots,*)$ (k אפסים).
ניסוח עם בסיס דואלי: יהי $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ הבסיס הדואלי. אז $\varphi_{k+1},\dots,\varphi_n\in U^\circ$ בת"ל ופורשים: לכל $\varphi\in U^\circ$,

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(v_1)\varphi_1+\cdots+\varphi(v_n)\varphi_n = \\ &= 0+\cdots+0+\varphi(v_{k+1})\varphi_{k+1}+\cdots+\varphi(v_n)\varphi_n \end{aligned}.$$

20. לכל $U\subseteq V$, $U^{\circ\circ} = E[U] = \{\hat{u} : u\in U\}$.
$E[U]\subseteq U^{\circ\circ}$ ומהסעיף הקודם, מימדם שווה.

21. תרגיל: יהי $\mathbb{F}$ שדה עם לפחות $n+1$ איברים. יהי $V=\mathbb{F}_n[x]$. נקבע $\alpha_0,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ שונים. נגדיר $\varphi_0,\dots,\varphi_n : V\to\mathbb{F}$ על ידי

$$\varphi_i(f) := f(\alpha_i)$$

לכל $f\in V$.

(א) הוכח ש $C=\{\varphi_0,\dots,\varphi_n\}\subseteq V^*$ ומהווה בסיס עבורו.

(ב) מצא את הבסיס B של V כך ש $C=B^*$.

(ג) הוכח שהנוסחה $\varphi = \varphi(v_1)\varphi_1+\cdots+\varphi(v_n)\varphi_n$ היא נוסחת האינטרפולציה של לגרנז' (ראה
http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial
http://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_interpolation
לפרטים).

22. תרגיל: יהי $V=\mathbb{F}_n[x]$, ונניח שהמאפיין של $\mathbb{F}$ הוא 0. נקבע $\alpha\in\mathbb{F}$. לכל $i=0,1,\dots,n$ נגדיר $\varphi_i : V\to\mathbb{F}$ על ידי

$$\varphi_i(f) := f^{(i)}(\alpha)$$

לכל $f\in V$. ($f^{(i)}(x)$ הוא הנגזרת ה i של $f(x)$.)

(א) הוכח ש $C=\{\varphi_0,\dots,\varphi_n\}\subseteq V^*$ ומהווה בסיס עבורו.

(ב) מצא את הבסיס B של V כך ש $C=B^*$.

(ג) הוכח שהנוסחה $\varphi = \varphi(v_1)\varphi_1+\cdots+\varphi(v_n)\varphi_n$ היא פיתוח טיילור (להגדרת "פיתוח טיילור" ראה ויקיפדיה בעברית).

23 הערה: משפט פרובניוס וגוגל

יועלה לאתר הקורס.