שיעורי בית מספר 3

1. ב $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הסקלארית נגדיר $W = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.
מצאו בעזרת גרם שמידט בסיס אורתונורמאלי ל W.

2. יהא $V = \mathbb{R}_2[x]$, נגדיר מכפלה פנימית על V כך:

$$\forall f,g \in V:\ \langle f,g\rangle = \sum_{i=0}^{2} f(i)g(i)$$

(א) עבור $f(x) = x, g(x) = x^2 + 4x - 3$ חשבו את $\langle f,g\rangle$.

(ב) מצאו בסיס או"ג ל V.

3. תהא $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ העתקת הנגזרת (כלומר $p(x) \mapsto p'(x)$). מצאו את כל ת"מ ה D- אינווראינטים. [מותר להשתמש בעובדה כי אם $\{p_i(x)\}_{i=1}^m$ פולינומים מדרגות שונות (שונים מאפס) אזי הם בת"ל].

4. יהא $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. ויהא $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס או"נ. נגדיר מטריצה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך: עמודה j של המטריצה P הוא הוקטור v_j. כלומר $P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

(א) הוכיחו כי $P^tP = I$

(ב) הוכיחו $det(P) \in \{\pm 1\}$

5. נגדיר $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ כך

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2x + y + 3z$$

ונגדיר קבוצה $S = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 1\right\} = \left\{v \in \mathbb{R}^3 :\ \|v\| = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (כאשר $\|v\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית). מצאו

$$\max_{v\in S} f(v)$$

[רמז: אי שיוויון קושי שוורץ, שימו לב כי $\left\langle v, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = f(v)$]

6. יהא V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ (עם מ"פ $\langle v, v' \rangle$) ויהא $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס או"נ הוכיחו כי לכל $v \in V$ מתקיים כי

$$\langle v, v \rangle = [v]_B^t \cdot [v]_B$$

7. יהא $(V, \langle\rangle)$ ממ"פ. ויהיו S, S_1, S_2 ת"ק של V.

(א) הוכיחו כי אם $S_1 \subseteq S_2$ אזי $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

(ב) הוכיחו כי $[span(S)]^{\perp} = S^{\perp}$