פתרון תרגיל בית 11 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

יהיו (X_i,τ_i) מרחבים טופולוגיים דיסקרטיים לכל $i\in I$. האם מרחב המכפלה $\prod_{i\in I} X_i$ דיסקרטי?

<u>רמז</u>: תלוי.

<u>פתרון</u>

<u>מקרה ראשון</u>: באוסף $\{X_i\}$ יש אינסוף אינדקסים כך שבמרחב X_i יש יותר מנקודה אחת. כלומר, הקבוצה $J=\{i\in I : |X_i|>1\}$ אינסופית.

במקרה זה $X=\prod_{i\in I} X_i$ אינו דיסקרטי. נראה שלמעשה אף נקודון אינו פתוח. נניח בשלילה שקיים נקודון $\{x\}\subseteq X$ פתוח. אם הוא פתוח, אזי ניתן לבטא אותו כאיחוד של קבוצות בסיסיות. מכיוון ש- $|\{x\}|=1$, ניתן להסיק שקיימת B בסיסית כך ש- $B=\{x\}$.

נגדיר תת-קבוצה של I: $F=\{i\in I : p_i(B)\neq X_i\}$. מהגדרת טופולוגיית המכפלה נקבל ש- F סופית. כעת נתבונן ב- $J-F=\{i\in I : p_i(B)=X_i \wedge |X_i|>1\}$, זו קבוצה אינסופית בהכרח. בפרט, נקבל שקיים $i_0\in I$ כך ש- $p_{i_0}(B)=X_{i_0}$ וכן $|X_{i_0}|>1$, בסתירה לכך ש- $|p_{i_0}(B)|=1$.

<u>מקרה שני</u>: באוסף $\{X_i\}$ יש לכל היותר מספר סופי של אינדקסים כך שבמרחב X_i יש יותר מנקודה אחת. במקרה זה כל נקודון ב- X הוא קבוצה בסיסית (הסבר: לכל $i\in I$, פרט למספר סופי, $p_i(\{x\})=X_i$). לכן, במקרה זה X הינו דיסקרטי.

שאלה 2

יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו כי הפונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}$ רציפה.

פתרון

לפי תרגיל שהוכחנו, מרחב המכפלה $X\times X$ הוא מטריזבילי, לכן הטופולוגיה עליו היא הטופולוגיה המתקבלת מהמטריקה $d_{\max}$, כלומר מהמטריקה

$d_{\max}:(X\times X)\times(X\times X)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$d_{\max}\left((x,y),(t,s)\right)=\max\left\{d(x,t),d(y,s)\right\}$. נראה שהפונקציה רציפה לפי $d_{\max}$ ואז בפרט היא רציפה מטופולוגית המכפלה. נוכיח רציפות בנקודה (x,y). צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_{\max}\left((x,y),(t,s)\right)<\delta$ אז $\left|d(x,y)-d(t,s)\right|$.

יהי $\varepsilon>0$ ונבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. אזי אם $d_{\max}\left((x,y),(t,s)\right)<\delta$ מתקיים

$$\left|d(x,y)-d(t,s)\right|\le d(x,t)+d(y,s)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

שימו לב: אי השוויון $\left|d(x,y)-d(t,s)\right|\le d(x,t)+d(y,s)$ נובע מאי שוויון המשולש של המטריקה d (איך?).

שאלה 3

יהי X מרחב טופולוגי ותהי I קבוצת אינדקסים. נסמן ב- X^I את מרחב המכפלה $\prod_{i\in I}X$. לכל $x\in X$ נגדיר $f_x\in X^I$ להיות הווקטור האינסופי שכל רכיביו הם x. נסמן $Y=\left\{f_x \mid x\in X\right\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ- X^I. הוכיחו כי X הומיאומורפי ל- Y.

פתרון

תהי $g:X\to Y$ מוגדרת ע"י $g(x)=f_x$. פונקציה זו רציפה שכן מתקבלת כצמצום הטווח של הפונקציה הרציפה $g:X\to\prod_{i\in I}X$ (המוגדרת על-ידי $g(x)=f_x$). אכן, הפונקציה האחרונה רציפה לפי קריטריון לרציפות פונקציה לתוך מרחב מכפלה, שכן היא רציפה רכיב-רכיב (בכל רכיב מדובר בפונקציית הזהות). תזכורת:

$g : X \to \prod_{i \in I} X$ רציפה אם ורק אם $p_i \circ g : X \to X$ רציפה לכל $i \in I$. אבל לכל $i \in I$ מתקיים $p_i \circ g(x) = p_i(f_x) = x$ כלומר לכל $i \in I$ מתקיים $p_i \circ g = Id_X$ ופונקציית הזהות כמובן רציפה ממ"ט לעצמו.

נקבע $i_0 \in I$. קל לראות שההופכית של $g : X \to Y$ היא הפונקציה $p_{i_0} : Y \to X$ שמתקבלת מצמצום התחום של פונקציית ההטלה הרציפה $p_{i_0} : \prod_{i \in I} X \to X$. לכן נקבל ש- g הוא הומיאומורפיזם מ- X ל- Y.

שאלה 4

הוכיחו שמכפלת מרחבי T_1 היא מרחב T_1.

פתרון

נניח שלכל $i \in I$ X_i הוא מרחב T_1 ונוכיח ש- $\prod_{i \in I} X_i$ הוא מרחב T_1. שקול להוכיח שכל נקודון סגור ב- $\prod_{i \in I} X_i$.

יהי $\prod_{i \in I} \{x_i\}$ נקודון. נראה שהמשלים שלו פתוח. מתקיים: $\left(\prod_{i \in I} \{x_i\}\right)^C = \bigcup_{i \in I} \prod_{j \in I} Y_{j,i}$

כאשר

$$Y_{j,i} = \begin{cases} X_j & j \neq i \\ X_j \setminus \{x_j\} & j = i \end{cases}.$$

<u>הערה</u>: כדי להבין טוב יותר את החישוב הנ"ל התבוננו במכפלה סופית ושכנעו את עצמכם שזוהי הצורה הכללית של המשלים של נקודון במרחב מכפלה.

כעת, מכיון שכל המרחבים הנתונים הם T_1 אז בהכרח לכל $i, j \in I$ מתקיים ש- $Y_{j,i}$ פתוחה ב- X_j. מכאן, לכל $i \in I$ $\prod_{j \in I} Y_{j,i}$ פתוחה בסיסית במרחב המכפלה ולכן $\bigcup_{i \in I} \prod_{j \in I} Y_{j,i} = \left(\prod_{i \in I} \{x_i\}\right)^C$ פתוחה כאיחוד של פתוחות.

<u>שאלה 5</u>

א. יהי X מ"ט דיסקרטי עם בסיס B. הוכיחו שלכל $x\in X$ מתקיים $\{x\}\in B$.

ב. יהי X מ"ט עם בסיס B, Y קבוצה ו- $f:X\to Y$ פונקציה **על**.

הוכיחו/הפריכו:

$B'=\{O\subseteq Y: f^{-1}(O)\in B\}$ בסיס לטופולוגיית המנה על Y.

ג. יהי $\mathbb{R}_l$ הישר של סורגנפריי ותהי $f:\mathbb{R}_l\to\mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם.

מצאו את טופולוגיית המנה τ על $\mathbb{Z}$ ביחס ל- f.

<u>פתרון</u>

א. נסמן את הטופולוגיה הדיסקרטית ב- τ. תהי $x\in X$ אזי $\{x\}\in\tau$. B בסיס ולכן קיימת $U\in B$ כך ש- $x\in U\subseteq\{x\}$. מכאן בהכרח $U=\{x\}\in B$.

ב. נפריך את הטענה על-ידי דוגמה נגדית מהתרגול. ניקח $X=\mathbb{Z}$ מ"ט דיסקרטי כש- B הוא בסיס המורכב מכל הנקודונים.

תהי Y הקבוצה $\mathbb{Z}_3$ ו- $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_3$ מוגדרת ע"י $f(m)=m(\mathrm{mod}\,3)$. ראינו שבמקרה זה טופולוגית המנה τ על Y היא הדיסקרטית. נראה ש- $\{0\}\notin B'$ ולכן על-פי הסעיף הקודם B' אינו בסיס לטופולוגיית המנה על Y. ואכן, אחרת, $\{0\}\in B'$ אבל אז נקבל מהגדרת B' ש- $f^{-1}(\{0\})=3\mathbb{Z}\in B$ בסתירה להגדרת B.

דוגמה נוספת: $Y=\{a,b\}$, $X=\{x,y,z\}$, נבחר $B=\{\{x\},\{y\},\{z\}\}$, ונגדיר את $f:X\to Y$ על-ידי $f(z)=b$, $f(x)=f(y)=a$. אזי B' הוא לא בסיס ל- Y (בדקו!).

ג. $\tau=\tau_{disc}$ הטופולוגיה הדיסקרטית. הוכחנו בעבר ש- $f:\mathbb{R}_l\to(\mathbb{Z},\tau_{disc})$ פונקציית הערך השלם רציפה ולכן נקבל מיידת ש- $\tau=\tau_{disc}$.

שאלה 6

נתבונן ב- $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית ובפונקצית הערך השלם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$.

נסמן ב- τ את טופולוגיית המנה על $\mathbb{Z}$ ביחס ל- f .

א. הוכיחו שמתקיים $A\in\tau \Leftrightarrow$ אם $n\in A$ אז $n-1\in A$.

ב. הסיקו כי $\tau=\{\varnothing,\mathbb{Z}\}\cup\{(-\infty,M]\cap\mathbb{Z}:M\in\mathbb{Z}\}$.

פתרון

א. $\Leftarrow$ נניח ש $n\in A\in\tau$. מתקיים $n\in f^{-1}(A)$, אמנם, $f(n)=[n]=n\in A$.

כמו כן מכיון ש- τ טופולוגיית מנה ו- $A\in\tau$ נקבל ש $f^{-1}(A)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$

(ולכן היא סביבה של n). לכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $(n-\varepsilon,n+\varepsilon)\subseteq f^{-1}(A)$.

בפרט, קיים $n-1<t<n$ המקיים $t\in(n-\varepsilon,n+\varepsilon)\subseteq f^{-1}(A)$. מכאן,

$f(t)=[t]=n-1\in A$.

$\Rightarrow$תהי $A\subseteq\mathbb{Z}$ כך שאם $n\in A$ אז $n-1\in A$. נראה ש- $A\in\tau$ לפי הגדרת טופולגיית מנה. נחלק למקרים:

מקרה ראשון: $A=\varnothing$. קל לראות ש- $f^{-1}(A)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ ולכן $A=\varnothing\in\tau$.

מקרה שני: $A\neq\varnothing$ וקיים ל-A מקסימום M. קל לראות ש- $f^{-1}(A)=(-\infty,M+1)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ ולכן $A\in\tau$.

מקרה שלישי: $A\neq\varnothing$ ללא חסם מלעיל. מהתנאי נקבל ש- $A=\mathbb{Z}$. במצב זה, $f^{-1}(A)=\mathbb{R}$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$.

ב. מהאפיון שהוכחנו ובייחוד מהכיוון $(\Rightarrow)$ נקבל ש-

$\tau=\{\varnothing,\mathbb{Z}\}\cup\{(-\infty,M]\cap\mathbb{Z}:M\in\mathbb{Z}\}$.

שאלה 7

א. יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y, g:Y\to X$ רציפות ומתקיים $f\circ g=id_Y$. הוכיחו כי f העתקת מנה.

ב. תהי $f:X\to Y$ העתקת מנה. הוכיחו כי f הומיאומורפיזם $\Leftrightarrow$ f חח"ע.

פתרון

א. עלינו להוכיח שני תנאים:

1. f על – נובע מכך שפונקצית הזהות היא על.

2. $U\subseteq Y$ פתוחה $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה. כיוון $\Leftarrow$ ברור מרציפותה של f.
נוכיח את הכיוון השני. תהי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X. בשל רציפות g,
$g^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)$ פתוחה ב- Y. מאידך $(f\circ g)^{-1}(U)=Id^{-1}(U)=U$. והוכחנו הדרוש.

ב. $\Leftarrow$ מיידי מהגדרת הומיאומורפיזם.
$\Rightarrow$ מספיק להוכיח כי ההעתקה פתוחה (רציפות ועל נובעות מכך ש- f היא העתקת מנה, חח"ע נתונה). תהי $V\subseteq X$ פתוחה. $V=f^{-1}\left(f(V)\right)$ (שימו לב שהשוויון מתקיים מכיוון ש- f חח"ע), מכיוון ש- $V=f^{-1}\left(f(V)\right)$ פתוחה ב- X נקבל ע"פי הגדרת העתקת מנה ש- $f(V)$ פתוחה ב- Y.