בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן

מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)

מספרי הקורס: 88211

המרצה: מיכאל מגרל

המתרגלים: לואי פולב ודורון פרלמן

תאריך: 04.10.2011 מועד א'

פתרון:

1. **א. הוכיחו את משפט Sylow 3 (הכמות של ת"ח).**

הוכחה בהרצאה.

ב. תהא G חבורה מסדר 21 כך שיש בה יותר משני איברים מסדר 3. הראו כי G לא אבלית אבל פתירה.

פתרון:

$r_7 \mid 3 \wedge r_7 \equiv 1 \pmod 7 \ \rightarrow r_7 = 1$, כמו כן:

$r_3 \mid 7 \wedge r_3 \equiv 1 \pmod 3 \ \rightarrow r_3 \in \{1,7\}$.

אבל $r_3 \neq 1$ כי יש יותר משני איברים מסדר 3, ולכן $r_3 = 7$. אבל אז חבורת 3-סילו אינה נורמלית ולכן G אינה אבלית.

פתירות נובעת מהטענה שכל חבורה מסדר pq עם p,q ראשוניים היא פתירה.

ג. חבורה G בעלת 15 אלמנטים פועלת מעל קבוצה עם 30 אלמנטים. הוכיחו או הפריכו: קיימת נקודת שבת.

פתרון:

קח חבורה G בת 30 איברים שיש בה תת חבורה $H \leq G$ בעלת 15 איברים

(למשל שורשי יחידה $H := \Omega_{15} \leq G := \Omega_{30}$)

נגדיר פעולה $H \times G \rightarrow G, h * g = hg$.

2. א. נניח $Q:=\{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ **חבורה בפעולת הכפל המוגדרת ע"י** $ijk=k^2=i^2=j^2=-1$.

השלימו את טבלת הכפל והוכיחו שכל ת"ח של Q **היא נורמלית ב** Q.

ב. מצאו תמונות אפימורפיות של Q **(עד כדי איזומורפיזמים).**

ג. תנו דוגמאות של 5 חבורות לא איזומורפיות עם 8 איברים.

פתרון:

חלק מהתשובות לשאלה זו נמצאות בתרגילים הבית או תרגילי הכיתה. למשל מיון של ת"ח והעובדה שהן כולן נורמליות ב Q.

בסעיף ב. תמונות אפימורפיות של Q (עד כדי איזומורפיזמים):

$Q \quad \Omega_2\times\Omega_2 \quad \Omega_2,\Omega_1$

מקרים של $Q/Q\cong\Omega_1 \quad Q/\{e\}\cong Q$ טריוויאליים.

מקרה של $\Omega_2\cong Q/H$ ברור משיקולים של משפט לגרנזי שיש ת"ח (נורמלית) $H\le Q$ עם 4 אלמנטים.

מקרה של חבורת קליין $\Omega_2\times\Omega_2$ מתקבל משיקולים הבאים: יש רק ת"ח אחת עם 2 איברים והיא $H:=\{1,-1\}$. היא נורמלית ב Q. Q/H היא חבורה עם 4 איברים. היא אבלית ולכן יש רק 2 מקרים: ציקלית או חבורת קליין. בחבורת מנה Q/H מתקיים $[k]^2=[i]^2=[j]^2=e$ לכן ב Q/H אין איבר מסדר 4. מכאן Q/H איזומורפית ל $\Omega_2\times\Omega_2$.

בסעיף ג. התשובה היא $Q,D_4,\mathbb{Z}_8,C_4\times C_2,C_2^{\,3}$

(D_4 לא אזומורפי ל Q לפי שיעורי בית הנ"ל)

3. א. תנו דוגמה של מונואיד $(X,\cdot)$ **עם 8 איברים כך שלא קיימת חבורה המכילה את** $(X,\cdot)$ **כתת מבנה.**

פתרון: למשל המונואיד $(\mathbb{Z}_8,\cdot)$ לא יכול להיות תת מבנה של חבורה היות ולא מתקיים בו חוק הצמצום (למשל...)

ב. נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(n)=3n$ **. הוכיחו שבמונואיד** $Map(\mathbb{N},\mathbb{N})$ **איבר** f **הוא הפיך רק מצד אחד.**

פתרון: f הפיכה מצד שמאל וההפכית שלה היא כל $g:f(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ המקיימת $\forall n\in\mathbb{N}\ \ g(3n)=n$. קל לראות שמתקיים $g\circ f=Id_{\mathbb{N}}$. קח למשל $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N},g(n)=[n]$ "חלק שלם"

מצד שני, נראה ש- f אינה הפיכה מימין. נניח בשלילה שכן, משמע קיימת פונקציה h כך ש- $f\circ h=Id$. אך קל לבדוק (וגם ידוע מבדידה) כי אז f היא פונקציה על. זאת סתירה, שכן לא קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$f(n)=1$.

ג. הוכיחו את משפט Euler על החזקות ובאמצעות המשפט פתרו את המשוואה

.$127^{301}x\equiv 2011 \bmod 99$

<u>פתרון:</u> הוכחה למשפט אוילר – בהרצאה.

הפתרון לתרגיל: שימוש במשפט אוילר: $x=40$.

4. א. הראו שחבורה סופית היא מסדר זוגי אם ורק אם קיים בה איבר מסדר 2.
<u>פתרון:</u>כיוון ראשון: אם החבורה מסדר זוגי אזי לפי משפט קושי קיים בה איבר מסדר 2. כיוון שני: אם קיים איבר מסדר 2, אזי לפי משפט לגרנז' סדר החבורה חייב להיות זוגי.

ב. מצאו את כל המונומורפיזמים $f:U_{10}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

<u>פתרון:</u> $U_{10}=\{[1],[3],[7],[9]\}$ ו-[3] הוא היוצר שלה והוא מסדר 4. יש לשלוח אותו לאיבר מסדר 4 בתוך $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. זה קובע חד-משמעית את המונומורפיזם כי U_{10} ציקלית. אבל שימו לב- $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong T=\{z\in\mathbb{C}:\|z\|=1\}$. יש במעגל היחידה בדיוק שני איברים מסדר 4 $\{i,-i\}$ ולכן יש שני מונומורפיזמים כאלה.

ג. הוכיחו שסכום ישר $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ הוא חבורה ציקלית אם ורק אם $(m,n)=1$.
<u>פתרון:</u> הוכחה בהרצאה עבור $C_m\times C_n$. קח בחשבון ש $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\cong C_m\times C_n$.

5. א. חבורה S_6 פועלת מעל חבורה A_6 על ידי הצמדות. נמקו מדוע הפעולה מוגדרת היטב ומצאו את מספר המסלולים של הפעולה $S_6\times A_6\to A_6$.
<u>פתרון:</u> הפעולה מוגדרת היטב שכן $A_6\lhd S_6$.
מספר המסלולים הוא מספר מחלקות הצמידות של A_6 .
מספר טיפוסים ששיכים ל A_6 .
בס"ה מספר טיפוסים שווה למספר חלוקות של 6
(משמאל נסמן את הזוגיות של הטיפוס)

6	+
5+1	-
4+2	+
4+1+1	-
3+3	+

3+2+1	-
3+1+1+1	+
2+2+2	-
2+2+1+1	+
2+1+1+1+1	-
1+1+1+1+1+1	+

בס"ה 11, מהם יש 6 זוגיים. לכן התשובה (מספר מסלולים) שווה 6.

ב. כמה איברים מתחלפים עם $a=(3,5,1,6)$ בחבורה S_8 ?

פתרון: אנו מחפשים: $\left|\left\{b\in S_8:\ ba=ab\right\}\right|=\left|\left\{b\in S_8: bab^{-1}=a\right\}\right|=\left|Stb\left(a\right)\right|$ (הגודל של המייצב ביחס לפעולת ההצמדה). $\left|Stb\left(a\right)\right|=\dfrac{|S_8|}{|S_8*a|}$ כאשר $|S_n*a|$ הוא גודל מחלקת הצמידות של a. S_n*a מכילה את כל המחזורים מאורך 4, ויש $\binom{8}{4}\frac{4!}{4}$ כאלה. לכן: $|Stb\left(a\right)|=\dfrac{|S_8|}{|S_8*a|}=\dfrac{8!}{\binom{8}{4}\frac{4!}{4}}=96$.

ג. תהא G חבורה מסדר 28. הוכיחו:

a) קיימת תת חבורה 7-סילו נורמלית.

b) אם G לא אבלית אזי $|G'|=7$.

c) אם G לא אבלית ויש לה תת חבורה נורמלית מסדר 2, אזי $G/Z(G)\cong D_7$.

פתרון של ג' בתרגול 8.

שאלת הבונוס: (5 נקודות)

נניח $F(a,b)$ מסמן חבורה חופשית מעל קבוצה $\{a,b\}$. הוכיחו שלכל חבורה סופית G קיימת ת"ח $X\le F(a,b)$ ות"ח נורמלית $H\triangleleft X$ כך ש G איזומורפית ל X/H .

הוכיחו גם שקיימת חבורה סופית G כך שהיא לא איזומורפית לחבורת מנה של $F(a,b)$.

פתרון: (החלק הראשון) לפי משפט קיילי חבורה G איזומורפית לתת חבורה $G_0\le S_n$ כאשר $|G|=n$. ז"א מספיק להוכיח את הטענה עבור G_0.

ידוע שקיימים $\alpha, \beta \in S_n$ כך ש $<\alpha, \beta> = S_n$. לכן קיים אפימורפיזם $f : F(a,b) \to S_n$. מכאן קיים גם אפימורפיזם $X := f^{-1}(G_0) \to G_0$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל $X / H \cong G_0$.

(החלק השני)

אם G חבורת מנה של $F(a,b)$ אז קיים אפימורפיזם $h : F(a,b) \to G$. אזי $<h(a), h(b)> = G$. נקבל $rank(G) \leq 2$. כעת מספיק לקחת G סופית עם $rank(G) > 2$. למשל $G := \Omega_2{}^3$.