פתרון תרגיל 6

1) א) אינטגרל לא אמיתי מסוג 2. הפונק' לא חסומה ב- $x=0$.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}+\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\delta}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\delta\to 0^+}\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}\Big|_{\delta}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{\varepsilon}}-3\right)+\lim_{\delta\to 0^+}-3+\frac{3}{\sqrt[3]{\delta}}=\boxed{\infty}$$

ב)

$$\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}+\int_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}+\lim_{\delta\to 0^+}\int_{2}^{3-\delta}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=$$

נפתור את האינטגרל הבלתי מסוים;

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}=\arcsin(x-2)$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin(x-2)\Big|_{1+\varepsilon}^{2} + \lim_{\delta\to 0^+} \arcsin(x-2)\Big|$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\arcsin(-1+\varepsilon) + \lim_{\delta\to 0^+} \arcsin(1+\delta)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \boxed{\pi}$$

ב) בקטע $[1,\infty)$ מתקיים $\ln(x^2+1) \geq \ln 2$

ולכן

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} \geq \frac{\ln 2}{x}.$$

אלו שתי פונקציות חיוביות. האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\ln 2}{x}dx$ מתבדר (חישוב פשוט מראה שהגבול הוא ∞).

ולכן ממבחן ההשוואה הראשון גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$ מתבדר.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{k\to-\infty}\int_{k}^{0} \frac{dx}{4+x^2} =$$

נפתור את האינטגרל הבלתי מסוים:

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{4\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{k\to-\infty} \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{k}^{0} =$$

$$= \lim_{k\to-\infty} -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{0}^{k} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$$

נפתור את האינטגרל הבלתי מסוים:

$$\int e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx = \left\{\begin{array}{l|l} f=e^{-\alpha x} & f'=-\alpha e^{-\alpha x} \\ g'=\cos(\beta x) & g=\frac{\sin(\beta x)}{\beta} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)e^{-\alpha x} + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l|l} f=e^{-\alpha x} & f'=-\alpha e^{-\alpha x} \\ g'=\sin(\beta x) & g=\frac{-\cos(\beta x)}{\beta} \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\beta} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1}{\beta} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{-\alpha x} \cos(\beta x\right.$$

$$= -\frac{1}{\beta} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\,dx$$

לכן,

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\,dx = -\frac{1}{\beta} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\,dx = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left[-\frac{1}{\beta} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\right.$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left[-\frac{1}{\beta} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\Big|_0^k\right.$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left[-\frac{1}{\beta} \underbrace{e^{-\alpha k} \sin(\beta k)}_{\to 0} - \frac{\alpha}{\beta^2} \underbrace{e^{-k\alpha} \cos(\beta k)}_{\to 0} + \frac{\alpha}{\beta^2}\right]$$

$$= \boxed{\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}}$$

2) א.) $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ עבור $a>0$ ו- $\alpha>0$.

נסמן $f(x)=\sin x$ ו- $g(x)=\frac{1}{x^2}$.

האינטגרל של f חסום. ו-g פונק' מונוטונית יורדת שואפת ל-0. לכן לפי מבחן דיריכלה האינטגרל מתכנס.

ב.)

$$\int_1^\infty \sin x^2\,dx = \left\{\begin{matrix} t=x^2 \\ dt=2x\,dx \end{matrix}\right\} = \int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$$

$$\frac{dt}{2\sqrt{t}}=dx$$

לפי תרגיל קודם $a=1>0$ ו- $\alpha=\frac{1}{2}>0$

אזי האינטגרל מתכנס.

ג.) האינטגרל $\int_{-1}^{1} \frac{2^{\arcsin x}}{1-x}dx$ אינטגרל מסוג II

הפונקציה לא חסומה ב-1. מכיוון שהפונק' חיובית בתחום נשווה אותה עם הפונק' $g(x)=\frac{1}{1-x}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{2^{\arcsin x}}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} 2^{\arcsin x} = 2^{\frac{\pi}{2}}$$

לכן האינטגרלים מתכנסים או מתבדרים יחד.

נבדוק את האינטגרל $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-x}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\ln|1-x|\Big|_{-1}^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\ln|\varepsilon| + \ln 2 = \infty$$

לכן האינטגרל שלנו גם מתבדר.

ב) האינטגרל $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$ אינטגרל מסוג I.

$\sin\frac{1}{x}$ היא חיובית בתחום $[1,\infty)$ לכן נשתמש במבחן המנה. נסמן $g(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{2+x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{\downarrow\, 1} \frac{1}{\underbrace{\frac{2}{x\sqrt{x}}}_{\downarrow\, 0}+1} = \boxed{1}$$

האינטגרל $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx$ מתכנס לכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

ה) האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$ הוא מסוג II.

פונק' חיוביות בתחום. נשתמש במבחן המנה. נסמן $g(x)=\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$$

האינטגרלים מתכנסים או מתבדרים יחד. האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ מתבדר לכן האינטגרל שלנו מתבדר

ו) נשווה אותו לאינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$,

ב- $[1,\infty)$ מתקיים $\frac{1}{(\ln x^2+1)(x^2+1)^4} \le \frac{1}{x^4}$

נבדוק האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ מתכנס.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^4} = \lim_{k\to\infty} \int_1^k x^{-4}dx = \lim_{k\to\infty} \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{3x^3}\Big|_1^k = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{3k^3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

לכן האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ מתכנס

לכן גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{(\ln x+1)(x^2+1)^2}dx$ מתכנס.

ב) חשבו עבור אילו ערכי אלפא האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx$$

<u>פתרון</u>

נשים לב כי מתקיים $\frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$

לכן נבדוק התכנסות של האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{H\to\infty}\int_1^H x^{-\alpha}\,dx = \lim_{H\to\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^H$$

$$= \lim_{H\to\infty}\frac{1}{-\alpha+1}\left(H^{-\alpha+1}-1\right)$$

עבור $-\alpha+1>0$ כלומר עבור $\alpha<1$
$H^{-\alpha+1}\xrightarrow[H\to\infty]{}\infty$ ואז האינטגרל מתבדר.

עבור $-\alpha+1<0$ כלומר עבור $1<\alpha$
$H^{-\alpha+1}\xrightarrow[H\to\infty]{}0$ ואז האינטגרל מתכנס.

לכן ~~לסיכום~~ האינטגרל מתכנס עבור $1<\alpha$. כאשר $1=\alpha$ האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתבדר. לכן האינטגרל מתכנס לסיכום עבור $\boxed{\alpha>1}$