תכונת ערך הביניים של נגזרת ואי קיום נקודות אי רציפות סליקות או מסוג ראשון

משפט (משפט ערך הביניים של Darboux לנגזרת)

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$ (בקצוות הכוונה לנגזרות חד צדדיות) .

אז עבור כל ערך c בין $f_{+}^{(1)}(a)$ ובין $f_{-}^{(1)}(b)$ קיימת נקודה $a \leq x_0 \leq b$ כך ש:

$f^{(1)}(x_0) = \mathrm{c}$.

הוכחה :

נניח למשל כי $f_{+}^{(1)}(a) < c < f_{-}^{(1)}(b)$. נגדיר את הפונקציה הבאה :

$g(x) \coloneqq f(x) - c \cdot x$.אז קיים $g^{(1)}(x) = f^{(1)}(x) - c$.

הפונקציה $g(x)$ רציפה ולכן מקבלת ערך מינימלי בקטע (משפט ווירשטראס) – נניח ערך זה מתקבל בנקודה x_0 . לפי הנתון מתקיים : $g^{(1)}(a) = f^{(1)}(a) - c < 0$, ולפי הגדרת נגזרת ימנית נקבל : $g_{+}^{(1)}(a) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} < 0$, ולכן עבור $h > 0$

קטן מספיק יתקיים : $g(a+h) < g(a)$ ולכן הנקודה a איננה נקודת המינימום של $g(x)$ בקטע שלנו – ומכאן נקבל $a < x_0$. באופן דומה נוכל להוכיח כי $x_0 < b$ ולכן קיבלנו :

$a \leq x_0 \leq b$ ומכאן x_0 נקודת מינימום של $g(x)$ בקטע הפתוח (a,b) . לפי משפט פרמה קיים : $g^{(1)}(x_0) = 0$ ולכן : $0 = g^{(1)}(x_0) = f^{(1)}(x_0) - \mathrm{c} \Leftarrow \boldsymbol{f^{(1)}(x_0) = \mathbf{c}}$ כנדרש .

--- משל"ל !

משפט (קריטריון לגזירות פונקציה בנקודה)

תהי $f(x)$ רציפה בסביבת הנקודה c וגזירה שם , פרט אולי לנקודה c עצמה .

אם קיים הגבול : $\lim_{x\to c} f^{(1)}(x) = L$ (במקום גבול כללי אפשר לקחת גבול חד צדדי מתאים) , אז $f(x)$ גזירה בנקודה c וקיים $f^{(1)}(\mathrm{c}) = L$ (ואם לקחנו גבול חד צדדי אז מדובר על נגזרת חד צדדית מתאימה !) .

הוכחה

לפי ההנחה קיים מספר $c < b$ כך שבקטע $[c, b]$ הפונקציה שלנו רציפה , וגזירה בכל נקודה , פרט אולי לנקודה c עצמה .נבחר מספר: $0 < h < b - c$. לפי משפט ערך הביניים של Lagrange , קיים $f(c+h) - f(c) = h \cdot f^{(1)}(x_0)$, כאשר :

$$c < x_0 < c + h \quad \Leftarrow \quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f^{(1)}(x_0)$$,כעת אם $h \to 0^+$ אז , $x_0 \to c^+$

ולכן נקבל : $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{x_0\to c^+} f^{(1)}(x_0) = L$, ולכן f גזירה מימין ב x_0 וערך הנגזרת הימנית הזו הוא L . אם נניח שקיים גם הגבול הדומה השמאלי – נקבל שהפונקציה גזירה משמאל עם אותו ערך נגזרת משמאל – ובצירוף שני הגבולות נסיק שהפונקציה <u>גזירה</u> בנקודה (גזירה מימין ומשמאל עם אותו ערך נגזרת בשני הכיוונים) .

--מש"ל .

<u>מסקנה</u> נקודות אי הרציפות של הנגזרת של פונקציה גזירה הן תמיד מסוג שני !

הסבר : תהי נקודה $a < x_0 < b$ כך שקיימים הגבולות : $\lim_{h\to 0^\pm} f^{(1)}(x_0 + h)$.

לפי המשפט שהוכח כעת , מתקיים : $\lim_{h\to 0^+} f^{(1)}(x_0 + h) = f_+^{(1)}(x_0)$

ו- $f_{-}^{(1)}(x_0) = \lim_{h\to 0^-} f^{(1)}(x_0+h)$. לפי ההנחה הפונקציה גזירה בנקודה x_0 ולכן שני גבולות אלו שווים – ומכאן שלא ייתכן שנקודות אי הרציפות תהיינה מסוג ראשון או סליקות .

*** ניתן להסיק מסקנה זו גם מתכונת ערך הביניים של הנגזרת ...

תומר .