תרגיל 7 – לינארית

1. יהי V מרחב וקטורי מעל F, $\phi \neq A,B \subseteq V$. נגדיר $A+B := \{a+b \mid a\in A, b\in B\}$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1.1. $span(A+B) = span(A)\cup span(B)$

הפרכה: יהיו $V=R^2$, $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

אזי, $spanA = \left\{\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix} : t\in R\right\}$ ו $spanA = \left\{\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix} : t\in R\right\}$. לכן,

$spanA \cup spanB = \left\{\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix} : t\in R\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix} : t\in R\right\}$.

נשים לב, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in spanA\cup spanB$ אבל $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin spanA\cup spanB$. לכן,

$spanA\cup spanB$ אינו מ"ו ובפרט אינו שווה ל $span(A+B)$. (ראינו כי $span$ הוא תמיד מ"ו).

1.2. $span(A\cup B) = span(A)\cup span(B)$

הפרכה: הדוגמה מהסעיף הקודם מפריכה גם את סעיף זה בדיוק באותו אופן. צד ימין אינו תמ"ו ואילו צד שמאל כן.

1.3. $span(A+B) = span(A)+span(B)$

הפרכה: יהיו $V=R^2$, $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ראינו בתרגול כי $span(A\cup B) = span(A)+span(B)$.

$A\cup B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של R^2. לכן, $span(A)+span(B)=span(A\cup B)=R^2$.

לעומת זאת, $A+B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ לכן, $span(A+B)=\left\{\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix} : t\in R\right\}$. ברור כי עבור $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\in R^2$

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\notin span(A+B)$. לכן, $span(A+B)\neq span(A)+span(B)$

1.4. $span(A\cap B) = span(A)\cap span(B)$

הפרכה: יהיו $V=R^2$, $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$. A,B בת"ל מגודל 2, לכן בסיסים ל

$V=R^2$. לכן, $span(A)=span(B)=R^2$ ו $span(A)\cap span(B)=R^2$. לעומת זאת

$R^2 \neq span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} = span(A\cap B)$. לכן, $span(A\cap B)\neq span(A)\cap span(B)$

2. תהא $A \in M_{m\times n}(R)$ ויהיו $B_R, B_C, B_N, B_{N(A^t)}$ בסיסים למרחבי השורות, העמודות, האפס והאפס השמאלי בהתאמה. הוכיחו כי $B_R \cup B_N$ בסיס ל R^n וכי $B_C \cup B_{N(A^t)}$ בסיס ל R^m באמצעות הסעיפים הבאים.

2.1 נסמן $B_N = \{w_1,...,w_k\}$, $B_C = \{v_1,...,v_r\}$. הוכיחו כי $r+k=n$ באמצעות הסעיפים הבאים:

2.1.1. הראו כי לכל $1 \le i \le r$ קיים $u_i \in R^n$ כך ש $Au_i = v_i$. בחרו u_i-ים כנ"ל והתבוננו בקבוצה, $B = \{u_1,...,u_r, w_1,...,w_k\}$. הוכיחו כי הקבוצה B בת"ל.

(הדרכה: קחו צירוף לינארי השווה לאפס והפעילו עליו כפל במטריצה A).

הוכחה: לכל $1 \le i \le r$ $v_i \in C(A) = \{Ax : x \in R^n\}$ לכן, לכל $1 \le i \le r$ קיים $u_i \in R^n$ כך ש $Au_i = v_i$. יהיו $u_1,...,u_r \in R^n$ איברים כנ"ל. נראה כי $B = \{u_1,...,u_r, w_1,...,w_k\}$ בת"ל.

יהי $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + ... \beta_k w_k = 0$. מ"ל: $\alpha_1,..,\alpha_r, \beta_1,...,\beta_k = 0$.

נכפול את השוויון ב A מצד שמאל.

$$A(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + ... \beta_k w_k) = A0$$

$$\alpha_1 Au_1 + ... + \alpha_r Au_r + \beta_1 Aw_1 + ... \beta_k Aw_k = 0$$

מכיוון ש $w_1,...,w_k \in N(A)$, $Aw_i = 0$ לכל $1 \le i \le k$. לכן:

$$\alpha_1 Au_1 + ... + \alpha_r Au_r = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = 0$$

אבל, $B_C = \{v_1,...,v_r\}$ בסיס ובפרט בת"ל לכן, $\alpha_1,..,\alpha_r = 0$.

נחזור לשוויון $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + ... \beta_k w_k = 0$ ונציב $\alpha_1,..,\alpha_r = 0$. נקבל

$$\beta_1 w_1 + ... \beta_k w_k = 0$$

אבל, $B_N = \{w_1,...,w_k\}$ בסיס ובפרט בת"ל לכן, $\beta_1,...,\beta_k = 0$.

2.1.2. הוכיחו כי B מהסעיף הקודם פורשת את R^n .

הדרכה: יהי $v \in R^n$. הציגו את Av בצורה $Av = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$. הסיקו ש $\left(v - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i\right) \in N(A)$ ולכן הוא צירוף לינארי של אברי B_N .

הוכחה: יהי $v \in R^n$. מ"ל $v \in span(B)$.

אבל, Av הוא צירוף לינארי של עמודות A . לכן,

$Av \in C(A) = span(B_C) = span\{v_1,...,v_r\}$. לכן, קיימים $\alpha_1,..,\alpha_r \in R$ כך ש $Av = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$.

נוכיח כי $\left(v-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i\right)\in N(A)$. אכן,

$$A\left(v-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i\right)=Av-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i Au_i=Av-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i=0$$ לכן

$$\left(v-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i\right)\in N(A)=spanB_N.$$

לכן,

$$v=\left(v-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i\right)+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i\in span(B_N)+span\{u_1,...,u_r\}=span(B_N\cup\{u_1,...,u_r\})=span(B)$$

2.1.3. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $B=\{u_1,...,u_{r,}w_1,...,w_k\}$ בסיס ל R^n. השתמשו במשפט השלישי חינם להסקת $r+k=n$.

הוכחה: ראינו כי $B\subseteq R^n$ בת"ל ופורשת את R^n לכן היא בסיס ל R^n. לכן, מספר האיברים בה שווה למימד של R^n מעל R. כלומר, $|B|=r+k=n$

2.1.4. מכיוון ש $|B_R|=|B_C|$ נקבל כי ב $B_R\cup B_N$ יש n איברים (שימו לב כי לפי הסעיף הבא $B_R\cap B_N=\phi$).

2.2 הוכיחו שאם $x\in R(A)\cap N(A)$ אז $x=0$.

(הדרכה: אם $Ax=0$ וכן $x=A^t y$, חשבו מה ניתן לקבל באמצעות כפל ב x^t).

הוכחה: יהי $x\in R(A)\cap N(A)$.

$x\in R(A)\Leftarrow$ קיים $y\in R^m$ כך ש $x=A^t y$.

$Ax=0\Leftarrow x\in N(A)$.

נכפול את $x=A^t y$ משמאל ב x^t ונקבל:

$$\Leftarrow x^t x=x^t A^t y$$
$$\Leftarrow \begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(Ax)^t y$$
$$\Leftarrow \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2=0$$
$$\Leftarrow \forall i \quad x_i=0$$
$$x=0$$

2.3 נסמן, $B_N=\{w_1,...,w_k\}$, $B_R=\{h_1,...,h_r\}$. הוכיחו כי $B_R\cup B_N$ בת"ל. (הדרכה: התבוננו בצירוף לינארי השווה לאפס והראו, בעזרת הסעיף הקודם, כי הצירוף הוא צ"ל טריוויאלי).

הוכחה: יהי $\alpha_1 h_1+...+\alpha_r h_r+\beta_1 w_1+...\beta_k w_k=0$. מ"ל: $\alpha_1,..,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_k=0$.

נכפול את השוויון ב A מצד שמאל.

$$A(\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_r h_r + \beta_1 w_1 + ...\beta_k w_k) = A0$$

$$A(\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_r h_r) + \beta_1 Aw_1 + ...\beta_k Aw_k = 0$$

מכיוון ש $w_1,...,w_k \in N(A)$, $Aw_i = 0$ לכל $1 \le i \le k$. לכן:

$$A(\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_r h_r) = 0 \Rightarrow$$

נסמן $x = \alpha_1 h_1 + ... + \alpha_r h_r$ אזי, $x \in span(B_R) = R(A)$ וכן $Ax = 0 \Leftarrow x \in N(A)$. לכן, $x \in R(A) \cap N(A)$ ולפי הסעיף הקודם $x = 0$. לכן,

$$\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_r h_r = 0$$

אבל, $B_R = \{h_1,...,h_r\}$ בסיס ובפרט בת"ל לכן, $\alpha_1,..,\alpha_r = 0$.

נחזור לשוויון $\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_r h_r + \beta_1 w_1 + ...\beta_k w_k = 0$ ונציב $\alpha_1,..,\alpha_r = 0$. נקבל

$$\beta_1 w_1 + ...\beta_k w_k = 0$$

אבל, $B_N = \{w_1,...,w_k\}$ בסיס ובפרט בת"ל לכן, $\beta_1,...,\beta_k = 0$.

2.4. לפי משפט השלישי חינם הסיקו כי $B_R \cup B_N$ בסיס ל R^n.

הוכחה, לפי סעיף 2.1.4, $| B_R \cup B_N | = n = \dim_R R^n$. לפי הסעיף הקודם $B_R \cup B_N$ בת"ל. לכן, לפי משפט השלישי חינם $B_R \cup B_N$ גם פורשת ובפרט בסיס ל R^n.

עד כה הוכחנו כי אם $A \in M_{m\times n}(R)$ ו B_R, B_N, בסיסים למרחבי השורות והאפס בהתאמה אז $B_R \cup B_N$ בסיס ל R^n.

נותר להוכיח כי אם $A \in M_{m\times n}(R)$ ו $B_C, B_{N(A^t)}$ בסיסים למרחבי העמודות והאפס השמאלי בהתאמה אז $B_C \cup B_{N(A^t)}$ בסיס ל R^m.

אבל, תהי $A \in M_{m\times n}(R)$ ו $B_C, B_{N(A^t)}$ כנ"ל. אזי, $R(A^t) = C(A)$ לכן, B_C בסיס למרחב השורות של $A^t \in M_{n\times m}(R)$. בדומה, מרחב האפס של A^t שווה למרחב האפס השמאלי של A לכן, $B_{N(A^t)}$ בסיס למרחב האפס של A^t. לכן, לפי מה שהוכחנו, $B_C \cup B_{N(A^t)}$ בסיס ל R^m.
מש"ל.

3. יהי V מרחב וקטורי מעל F ונניח כי $B = \{v_1, v_2,..., v_n\}$ בסיס שלו. הוכיחו או הפריכו:

3.1. $\{v_1 + v_2, v_2,..., v_n\}$ בסיס של V.

הוכחה: מכיוון ש $B = \{v_1, v_2,..., v_n\}$ בסיס של V מעל F, המימד של V מעל F הוא n.
לכן, מכיוון שב $\{v_1 + v_2, v_2,..., v_n\}$ יש n איברים לפי משפט בשלישי חינם, מ"ל $\{v_1 + v_2, v_2,..., v_n\}$ פורשת או בת"ל.
נראה פורשת: ברור כי $v_2,..., v_n \in span\{v_1 + v_2, v_2,..., v_n\}$. כמו כן, $v_1 = (v_1 + v_2) - v_2 \in span\{v_1 + v_2, v_2,..., v_n\}$. לכן,

$B=\{v_1,v_2,...,v_n\}\subseteq span\{v_1+v_2,v_2,...,v_n\}$. לכן, $spanB\subseteq span\{v_1+v_2,v_2,...,v_n\}$. אבל B בסיס ל V, לכן, $spanB=V$ ו
$V\subseteq span\{v_1+v_2,v_2,...,v_n\}\subseteq V \Leftarrow span\{v_1+v_2,v_2,...,v_n\}=V$. מש"ל.

(לחילופין, יכולנו להראות בת"ל. יהי $\alpha_1(v_1+v_2)+\alpha_2v_2+...\alpha_nv_n=0$.
מ"ל: $\alpha_1,..,\alpha_n=0$. אבל,

$$\Leftarrow \alpha_1(v_1+v_2)+\alpha_2v_2+...\alpha_nv_n=0$$
$$\Leftarrow \alpha_1v_1+(\alpha_1+\alpha_2)v_2+...\alpha_nv_n=0$$

לכן, $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ בסיס ובפרט בת"ל לכן,

$$\alpha_1=0$$
$$\alpha_1+\alpha_2=0$$
$$\alpha_3=0$$
$$...$$
$$\alpha_n=0$$

אבל, משתי המשוואות הראשונות נקבל שגם $\alpha_2=0$ לכן, בסה"כ $\alpha_1,..,\alpha_n=0$)

3.2 לכל $\alpha\in F$, $\{\alpha v_1,v_2,...,v_n\}$ בסיס של V.

הפרכה: עבור $\alpha=0$, $\{\alpha v_1,v_2,...,v_n\}=\{0,v_2,...,v_n\}$ אינה בת"ל בתור קבוצה המכילה את 0. בפרט אינה בסיס.

4. מצאו בסיסים ומימדים לארבעת תתי המרחבים היסודיים של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

בסיס למרחב השורה: נדרג את המטריצה. הדירוג לא משפיע על מרחב השורה.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2+R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-R_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן, $R(A)=span\left\{\begin{matrix}(2 & 3 & 1 & 4 & 5) \\ (0 & 0 & 1 & 1 & 0)\end{matrix}\right\}$. מכיוון ש $\left\{\begin{matrix}(2 & 3 & 1 & 4 & 5) \\ (0 & 0 & 1 & 1 & 0)\end{matrix}\right\}$ בת"ל,

$\left\{\begin{matrix}(2 & 3 & 1 & 4 & 5) \\ (0 & 0 & 1 & 1 & 0)\end{matrix}\right\}$ בסיס למרחב השורה $R(A)$. בפרט, מימד מרחב השורה הוא 2.

(הערה: גם כאשר מדובר על מרחב השורה, נהוג לדבר על המרחב כמרחב של וקטורי עמודה,

לכן פורמלית, $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\\4\\5\end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב השורה)

בסיס למרחב העמודה: עמודות הצירים במטריצה המדורגת הן העמודה הראשונה והשלישית לכן העמודות המתאימות במטריצה המקורית מהוות בסיס למרחב העמודה. כלומר,

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב עמודה. בפרט מימד מרחב העמודה: 2.

בסיס למרחב האפס: דירוג מטריצה לא משפיע על מרחב האפס שלה. נמצא את מרחב האפס של המטריצה המדורגת. כלומר, נמצא את מרחב הפתרונות למערכת ההומוגנית,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&3&1&4&5&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

נציב, $x_5 = s$, $x_4 = t$. מהשורה השנייה נקבל, $x_3 + t = 0 \Leftarrow x_3 = -t$.

נציב, $x_2 = r$ ומהשורה הראשונה נקבל,

$2x_1 + 3r - t + 4t + 5s = 0 \Leftarrow x_1 = -1.5r - 1.5t - 2.5s$.

לכן,

$$N(A) = \left\{\begin{pmatrix}-1.5r-1.5t-2.5s\\r\\-t\\t\\s\end{pmatrix} : r,s,t \in F\right\} = \left\{r\begin{pmatrix}-1.5\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2.5\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1.5\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} : r,s,t \in F\right\}$$

$$= span\left\{\begin{pmatrix}-1.5\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2.5\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1.5\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

מכיון ש $\left\{\begin{pmatrix}-1.5\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2.5\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1.5\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל, זהו בסיס למרחב האפס. בפרט מימד מרחב האפס הוא 3.

בסיס למרחב האפס השמאלי:

נעבור ל A^t ונמצא את כל הפתרונות למערכת ההומוגנית $A^t x = 0$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&-2&2&2&0\\3&-3&3&3&0\\1&0&2&3&0\\4&-3&5&6&0\\5&-5&5&5&0\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R_1\\\frac{1}{3}R_2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&0\\1&-1&1&1&0\\1&0&2&3&0\\4&-3&5&6&0\\5&-5&5&5&0\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{R_2-R_1\\R_3-R_1\\R_4-4R_1\\R_5-5R_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&2&0\\0&1&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_4-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&0\\0&1&1&2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

נציב, $x_4 = s$, $x_3 = t$. מהשורה השנייה נקבל, $x_2 + t + 2s = 0 \Leftarrow x_2 = -t - 2s$.

ומהשורה הראשונה נקבל, $x_1 - (-t-2s) + t + s = 0 \Leftarrow x_1 = -2t - 3s$.

לכן, $$N(A^t) = \left\{\begin{pmatrix}-2t-3s\\-t-2s\\t\\s\end{pmatrix} : t,s\in F\right\} = \left\{t\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\\1\end{pmatrix} : t,s\in F\right\} = span\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מכיון ש $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל זהו בסיס למרחב האפס השמאלי. בפרט מימד מרחב האפס השמאלי הוא 2.

5. בכל סעיף, מצאו מטריצה A עם התכונה המתוארת או הוכיחו שלא קיימת מטריצה כזו.

5.1 מרחב העמודה מכיל את $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ומרחב השורה מכיל את $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון: נתבונן ב $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\in M_{3\times 2}(R)$. ברור כי מרחב העמודה מכיל את $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.
בנוסף מכיוון ששתי העמודות בת"ל, מימד מרחב העמודה הוא 2. לכן, גם מימד מרחב השורה הוא 2. לכן $R(A)\le R^2$ הוא תמ"ו מאותו מימד. ולכן, $R(A)=R^2$. בפרט מרחב השורה מכיל את $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}$.

5.2 למרחב העמודה בסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ ולמרחב האפס בסיס $\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון: נראה כי לא קיימת מטריצה כנ"ל.
נניח בשלילה כי קיימת A כנ"ל. אזי, לפי הנתון, אורך כל עמודה (כלומר, מספר השורות במטריצה) הוא 3. בדומה – כל וקטור במרחב האפס הוא באורך 3. לכן, מספר העמודות במטריצה הוא 3. בסה"כ: A היא מטריצה 3×3.

לפי משפט, $\dim N(A)+\dim R(A)=3$. אבל לפי הנתון, $\dim N(A)=1$ ו $\dim R(A)=\dim C(A)=1$. לכן $1+1=3$. סתירה.

5.3 מימד מרחב האפס גדול באחת ממימד מרחב האפס השמאלי.

פתרון: נתבונן במטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$.
מימד מרחב האפס: 2. מימד מרחב האפס השמאלי: 1.

5.4 $R(A)=C(A)$ אבל $N(A)\ne N(A^t)$

פתרון: נראה כי לא קיימת מטריצה כנ"ל. כלומר, אם עבור מטריצה A $R(A)=C(A)$ אז בהכרח $N(A)=N(A^t)$.
תהי A מטריצה כך ש $R(A)=C(A)$. בפרט, מכיוון שמרחב השורות שווה למרחב העמודות, אורך השורות שווה לאורך העמודות. כלומר, A מטריצה ריבועית.
על פי הנתון, $R(A)=C(A)=R(A^t)$ וצ"ל כי $N(A)=N(A^t)$ כאשר $N(A^t)$ הוא (מרחב האפס השמאלי או לחילופין,) מרחב האפס של A^t.

אנו נוכיח טענה כללית יותר: אם $A,B\in M_{n\times n}(F)$ הן מטריצות ריבועיות כך ש $R(A)=R(B)$ אזי $N(A)=N(B)$.

הוכחה: יהיו $A,B\in M_{n\times n}(F)$ מטריצות כך ש $R(A)=R(B)$. נראה כי $N(B)\subseteq N(A)$. ע"י החלפת התפקידים של A,B ניתן לקבל את ההכלה ההפוכה ומכאן יתקבל שוויון.

לכן, יהי $x\in N(B)$. מ"ל $x\in N(A)$.
אבל $R(A)=R(B)$ בפרט, לכל $1\le i\le n$ $R_i(A)\in R(B)$. לכן, לכל $1\le i\le n$, קיים $x_i\in R^n$ כך ש $R_i(A)={x_i}^tB$.

לכן, $B\begin{pmatrix} x_1{}^t \\ x_2{}^t \\ \vdots \\ x_n{}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1{}^t B \\ x_2{}^t B \\ \vdots \\ x_n{}^t B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & R_1(A) & - \\ - & R_2(A) & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(A) & - \end{pmatrix} = A$. אבל $x \in N(B)$ לכן , $Bx = 0$. לכן,

$0 = 0\begin{pmatrix} x_1{}^t \\ x_2{}^t \\ \vdots \\ x_n{}^t \end{pmatrix} = Bx\begin{pmatrix} x_1{}^t \\ x_2{}^t \\ \vdots \\ x_n{}^t \end{pmatrix} = Ax$. לכן $x \in N(A)$. מש"ל.

5.5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ שייך למרחב האפס השמאלי ו $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ שייך למרחב העמודה.

פתרון: נראה כי לא קיימת A כנ"ל.

נניח בשלילה כי קיימת A כנ"ל. לפי הנתון, אורך עמודה הוא 2, כלומר, מספר השורות במטריצה הוא 2. מכיוון ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ שייך למרחב האפס השמאלי, $(1 \quad 3)A = 0$.

לפי הנתון, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ שייך למרחב העמודה של A . לכן, קיים x כך ש $Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נכפול את $(1 \quad 3)A = 0$ ב x מימין. ונקבל $(1 \quad 3)Ax = 0$

לכן, $(1 \quad 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. בסתירה לכך ש $(1 \quad 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 3 = 6$. מש"ל.

בהצלחה! ☺