בס"ד

נוסחאות כלליות:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$$

$$\Rightarrow P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\cdots P(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

נוסחת בייס: $P(B|A) = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}$

נוסחת ההסתברות השלמה: אם $B_1,\dots B_n$ מאורעות זרים כך ש: $P(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n)=1$ אזי:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\cdot P(B_i)$$

חוקי דה מורגן:

$$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$$
$$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$$

A ו- B יקראו ב"ת (בלתי תלויים) אמ"מ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$\Rightarrow P(A|B) = P(A)$$

סכום של הנדסית אינסופית: $|q|<1$. $S=\frac{a_1}{1-q}$

-1-

ציון

88-165 תרגיל כיתה 3

1.

א. הוכחת כי: $P(E\cap F^c) = P(E) - P(E\cap F)$

$E = (E\cap F)\cup(E\cap F^c)$

$P(E) = P((E\cap F)\cup(E\cap F^c)) \underset{\downarrow}{=} P(E\cap F) + P(E\cap F^c) -$

עפ"י נוסחת ההכלה וההדחה

$- P(E\cap F\cap F^c) = P(E\cap F) + P(E\cap F^c) - P(\emptyset)$

$\Rightarrow P(E\cap F^c) = P(E) - P(E\cap F)$ מש"ל

ב. הוכחת כי: $P(A^c\cap(B\cup C)) = P(B) + P(C) - P(A\cap B) -$

$- P(B\cap C) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

$P(A^c\cap(B\cup C)) = P((A^c\cap B)\cup(A^c\cap C)) = P(A^c\cap B) +$

$+ P(A^c\cap C) - P(A^c\cap(B\cap C)) \underset{\downarrow}{=} P(B) - P(A\cap B) + P(C) -$

בהסתמך על א'

$- P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$ מש"ל

2. נתון: A - קבלה לקמפוס א'

B - קבלה לקמפוס ב'

$P(A) = 0.7$

$P(B) = 0.4$

$P(A^c\cup B^c) = 0.75 \underset{\downarrow}{=} P((A\cap B)^c) = 1 - P(A\cap B)$

דה מורגן

א. הסיכוי שהוא לא יתקבל לאף אחד: $P(A^c\cap B^c)$

$P(A^c\cap B^c) \underset{\downarrow}{=} 1 - P(A\cup B)$

דה מורגן

$P(A\cup B) \underset{\downarrow}{=} P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.25 = 0.85$

נוסחת ההכלה וההדחה

$P(A^c\cap B^c) = 1 - 0.85 = 0.15$

ב. הסיכוי שהוא יקבל תשובה חיובית מקמפוס א' בלבד: $P(A\cap B^c)$

$P(A\cap B^c) \underset{\downarrow}{=} P(A) - P(A\cap B) = 0.7 - 0.25 = 0.45$

שאלה 1, א'

3. פתרון א׳: נתעלם מהוצאה של כדורים שחורים, שאינם משנים דבר (ונקח) סדרת הוצאות של כדורים אדומים ולבנים. מכיון שבכל פעם מוציאים כדור ומחזירים אותו, ההסתברות שהכדור הראשון בסדרה הזו אדום הוא $\frac{3}{7}$.

פתרון ב׳

נסמן: A - הכדור האדום הראשון שיוצא, יוצא לפני הכדור הלבן הראשון שיוצא.

B - הכדור הראשון שיוצא הוא שחור

W - הכדור הראשון שיוצא הוא לבן

R - הכדור הראשון שיוצא הוא אדום.

$$P(A) = P(A|B)\cdot P(B) + P(A|R)\cdot P(R) + P(A|W)\cdot P(W)$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$= P(A|B)\cdot\frac{2}{9} + 0\cdot\frac{4}{9} + 1\cdot\frac{3}{9}$$

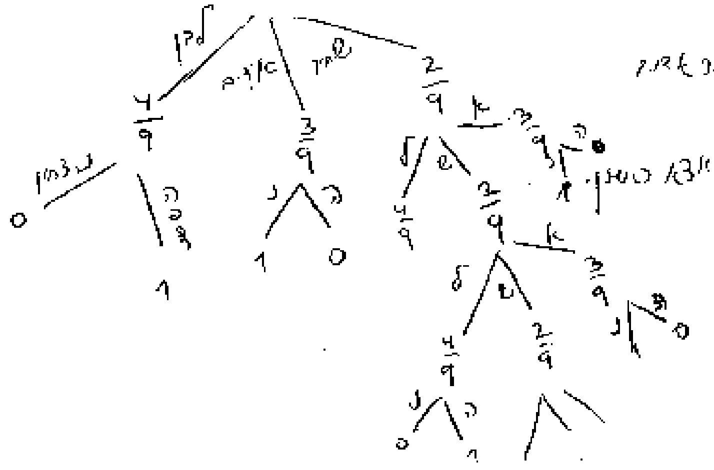
מכיון ש $P(A|B)=P(A)$ (כשחוזרים אל המצב ה...)

$$P(A) = P(A)\cdot\frac{2}{9} + \frac{3}{9} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{7}$$

פתרון ג׳

נגדיר ניצחון כהוצאת אדום ולא כראשון:

הפסד: כדור לבן יוצא ראשון.



נקבל את הטור אינסופי.

$$P(\text{ניצחון}) = 1\cdot\frac{3}{9} + 1\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{9} + 1\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdots = \frac{3}{9}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^i = \frac{3}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{3}{7}$$

טור אינסופי

בכה

לכן נקבל: בגבע הנגן 5 פעמים:

$$P(\text{הבדק כדורים לבנים}) = P(\text{התקבלו 5 ראשים}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

ה. נסמן: B - הוצאו 5 כדורים לבנים

A_i - בכד i כדורים לבנים.

$$P(A_5 \mid B) \underset{\text{בייס}}{=} \frac{P(B \mid A_5)\cdot P(A_5)}{P(B)} \underset{\text{נוסחת ההסתברות השלמה}}{=} \frac{1\cdot\frac{1}{32}}{\sum_{i=0}^{5} P(B \mid A_i)\cdot P(A_i)}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{32}}}{\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{5}\right)^5 \cdot \binom{5}{i}\cdot \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^5}} = \frac{3125}{11000}$$

בהינתן שישנם i כדורים לבנים ההסתברות להוציא כדור לבן היא: $\frac{i}{5}$

כדי שיהיו בכד i כדורים לבנים צריך שיהיו בדיוק i פעמים ראשים, $5-i$ פעמים זנב.

ו.

$$P(\text{כדור לבן} \mid \text{משקיפים דיווחו לבן}) \underset{\text{בייס}}{=} \frac{P(\text{משקיפים דיווחו לבן} \mid \text{כדור לבן})\cdot P(\text{כדור לבן})}{P(\text{משקיפים דיווחו לבן})}$$

$$\underset{\text{נוסחת ההסתברות השלמה}}{=} \frac{0.1\cdot 0.1\cdot \frac{n-k}{n}}{P(\text{דיווחו לבן} \mid \text{כדור שחור})\cdot P(\text{כדור שחור}) + P(\text{דיווחו לבן} \mid \text{כדור לבן})\, P(\text{כדור לבן})}$$

$$= \frac{0.01\cdot\frac{n-k}{n}}{0.9^2\cdot\frac{k}{n} + 0.1^2\cdot\frac{n-k}{n}} \quad /\cdot 100n$$

$$= \frac{n-k}{81k+n-k} = \frac{n-k}{80k+n}$$

5 ה. A - כדורים משני צבעים

B - יוצא לכל היותר כדור שחור 1.

ההסתברות להוציא כדור לבן $=\frac{1}{2}$:

נסמן X - מספר הכדורים הלבנים שהוצאו.

$$P(A)=P(0<X<N)=1-\underbrace{P(X=0)}_{\text{לא הוצאו כלל כדורים לבנים}}-\underbrace{P(X=N)}_{\text{כל הכדורים שהוצאו הם לבנים}}=1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^N-\left(\tfrac{1}{2}\right)^N$$

$$=1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-1}$$

$$P(B)=\underbrace{P(X=N-1)}_{\text{יוצאו N-1 כדורים לבנים ו-1 שחור}}+\underbrace{P(X=N)}_{\text{יוצאו N כדורים לבנים}}=\binom{N}{N-1}\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-1}}_{\text{N-1 כדורים לבנים}}\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)}_{\text{כדור שחור}}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^N=(N+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^N$$

על מנת להבין עבור אילו N המאורעות ב״ת צריך שיתקיים:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B):$$

$$P(A\cap B)=P(X=N-1)=N\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^N$$

$$N\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^N=\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-1}\right)\left((N+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^N\right)$$

$$N\left(\tfrac{1}{2}\right)^N=(N+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^N-(N+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2N-1}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^N=(N+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2N-1}$$

$$1=(N+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-1}$$

הביטוי מונוטוני יורד, נבדוק:

$N=1$: $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=2>1$

$N=2$: $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=1\frac{1}{2}>1$

$N=3$: $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$

$N=4$: $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3<1$

רק ~~עבור~~ $N=3$.